



TITLE:

トポロジカル超伝導体入門(<シリーズ>超伝導・超流動研究の接点)

AUTHOR(S):

佐藤, 昌利

---

CITATION:

佐藤, 昌利. トポロジカル超伝導体入門(<シリーズ>超伝導・超流動研究の接点). 物性研究 2010, 94(3): 311-349

ISSUE DATE:

2010-06-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/169340>

RIGHT:

# トポロジカル超伝導体入門

東京大学 物性研究所 佐藤昌利<sup>1</sup>

(2010年2月22日受理)

## 1 はじめに

超伝導研究の新しい潮流の1つとして、「トポロジカル超伝導体」が話題になっている [1, 2, 3, 4, 5, 6]。この小論では、「トポロジカル超伝導体」とは何か、具体的な例をもとに紹介したい。

本論に入る前に、「トポロジカル超伝導体」の名称について簡単に説明しておこう。皆さんが「トポロジカル超伝導体」という名前から想像するイメージは何であろうか。もしかしたら、それはメビウスの輪のような複雑な形状やトポロジを持つ超伝導体であるかもしれない。残念ながら、ここで扱う「トポロジカル超伝導体」とは、そのような特殊な形状をした超伝導体のことではない。「トポロジカル超伝導体」という名前は、準粒子の波動関数が非自明なトポロジを持つことに由来しており、その形状自体は通常のもと同じである。

「トポロジカル超伝導体」の特徴の1つは、「バルク・エッジ対応」とよばれる関係より、表面や渦の中のギャップレスモードが予言できることである。これらのギャップレスモードは、「トポロジカルな理由」によりその存在が保証されているため、ハミルトニアンのパラメータの変化に対して安定であり、近似の詳細にも (ほとんど) 依存しない。また、このギャップレスモードは特有の低エネルギー現象を示し、実験で観測可能である。更に、ある種の「トポロジカル超伝導体」では、ギャップレスモードの存在により、ボゾンでもフェルミオンでもエニオンでもない、「非可換統計」とよばれる本質的に新しい統計性に従う励起子が予言される。

以下では、このようなトポロジカル超伝導体の性質を紹介する。まず、前半では、アンドレーフ束縛状態とトポロジカル不変量の関係を中心に、話を進めることにしよう。また、後半では、トポロジカル超伝導体の重要な性質として、マヨラナ条件を説明し、その結果、スピンレス超伝導体中の超伝導渦が非可換統計に従うことを示す。

## 2 アンドレーフ束縛状態

まず、トポロジカル超伝導体の見方を説明する前に、後の話の準備として異方的超伝導状態の表面に現れるアンドレーフ束縛状態について、ごく簡単に復習しておこう<sup>2</sup>。(ミッドギャップ) アン

<sup>1</sup>E-mail: msato@issp.u-tokyo.ac.jp

<sup>2</sup>アンドレーフ束縛状態の詳細については、日本語の優れた解説 [7, 8, 9, 10, 11] があるので、もっと詳しい事に興味のある方はそちらを参考にしてもらいたい。

ドレーフ束縛状態とは、超伝導体・超流動体の表面や接合面に現れるギャップレス束縛状態（ミッドギャップ状態）である。その存在はトンネル電流など超伝導表面を介する低エネルギー現象に大きな影響を及ぼし、たとえば、高温超伝導体やヘリウム3超流動体の表面に現れるアンドレーフ束縛状態が実験で確認されている。

このような束縛状態が超伝導体・絶縁体界面に作られる仕組みを、おおざっぱに理解するには、超伝導体・絶縁体界面近くの電子の振る舞いを考えてみればよい。まず、電子が超伝導体から絶縁体へ向かった場合を考えると、電子は超伝導体・絶縁体界面で全反射され、絶縁体中に出ていけない。また、逆に、電子が超伝導体表面から超伝導体中心に向かった場合を考えると、超伝導ギャップのため、フェルミエネルギー近傍の電子の状態密度はゼロであるため、電子は超伝導体内部奥深くにも入り込めない。結局、電子は絶縁体の方向にも、超伝導体内部にも進むことができず、界面近くに閉じ込められることになる。このため、界面近くでの束縛状態の形成が可能となる。

実際に束縛状態が得られるか、また得られた束縛状態がギャップレスになるかは、超伝導体の種類に依存する。ギャップ関数が実数1成分  $\eta(\mathbf{k})$  で与えられる場合には、BdG 方程式の解析から、ゼロエネルギー束縛状態の存在条件が簡単な形にまとめられている [7]。つまり、図1のように、 $x$  軸に垂直な界面を考えた場合、

$$\eta(k_x, k_y)\eta(-k_x, k_y) < 0 \quad (1)$$

を満たす時には、ゼロエネルギー束縛状態が存在するが、

$$\eta(k_x, k_y)\eta(-k_x, k_y) > 0 \quad (2)$$

の時には、ゼロエネルギー束縛状態は存在しない。表1に、いくつかの異方的超伝導状態の例とアンドレーフ束縛状態の有無をまとめておく [7]。

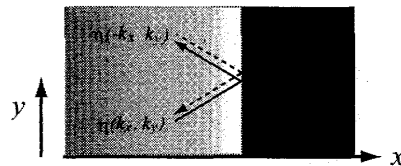


図1: 超伝導表面付近の電子の様子。超伝導中(左側)の電子は絶縁体(右側)との境界面では全反射され、超伝導体内部では、アンドレーフ反射によりホールとなって反射される。

超伝導の種類	s 波	$d_{x^2-y^2}$	$d_{xy}$	$p_x$	$p_y$
ギャップ関数	$\eta(\mathbf{k}) = \text{const.}$	$\eta(\mathbf{k}) = k_x^2 - k_y^2$	$\eta(\mathbf{k}) = k_x k_y$	$\eta(\mathbf{k}) = k_x$	$\eta(\mathbf{k}) = k_y$
アンドレーフ束縛状態	×	×	○	○	×

表1: いろいろなギャップ関数と、その時のアンドレーフ束縛状態

### 3 超伝導状態と量子ホール系の類似性

トポロジカル超伝導体という考え方の出発点は、超伝導状態と整数量子ホール状態の類似性である。そこで、超伝導状態と整数量子ホール状態の比較から、トポロジカル超伝導体の話をはじめめることにしよう。

整数量子ホール効果とはホール伝導度が量子化される現象であり、超伝導とはゼロ抵抗が実現される現象であるので、両者の間には、明確な違いがある。ところが、表2に挙げたように、その励起スペクトルに注目すると、両者には類似性もあることに気づかされる。つまり、整数量子ホール系にはランダウレベルの生成に伴うエネルギーギャップが、超伝導体にはクーパー対の生成に伴うエネルギーギャップが存在しており、その生成メカニズムには大きな違いがあるが、どちらも励起状態を作り出すのに有限のエネルギーが必要である。また端（エッジ）を作ると、整数量子ホール効果の場合にはカイラルエッジ状態が、また超伝導体の場合にはアンドレーフ束縛状態が生じ、バルクの状態に応じて、端に局在したギャップレス状態が作られる点も共通している。

	整数量子ホール状態	超伝導状態
バルク	ギャップ有 (ランダウ準位)	ギャップ有 (超伝導ギャップ)
エッジ	カイラルエッジ状態	アンドレーフ束縛状態

表 2: 整数量子ホール状態と超伝導状態の類似点

ところで、境界のない系の整数量子ホール状態に対しては、バルクの波動関数を使って、トポロジカル不変量 (いわゆる Thouless-Kohmoto-Nightingale-den Nijs (TKNN) 数、あるいは数学でいう Chern 数) が定義できることが知られており、ホール伝導度  $\sigma_{xy}$  の量子化

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} n_c, \quad (n_c \text{ は整数}) \quad (3)$$

は、整数  $n_c$  がこのトポロジカル不変量と一致することにより説明されている [12, 13]。その一方で、境界のある系の整数量子ホール状態では、境界に生じたカイラルエッジ状態が電流を運ぶ現象として、ホール伝導度が理解されている [14]。この描像では、ホール伝導度の量子化は、 $n_c$  がカイラルエッジ状態の個数と一致することにより説明される。したがって、これら二つの描像に矛盾がなく同じ量子化を与えるには、境界のない系のバルクの波動関数のトポロジカル不変量と境界がある場合のギャップレスエッジ状態の個数は、等しくなくてはならない。実際に、この一致が成り立つことも、格子模型で証明されている [15]。言い換えると、この一致は、バルクの波動関数のトポロジカル不変量から、ギャップレスエッジ状態の個数が予言できることを意味している。

ここで、量子ホール状態と超伝導状態の類似性に着目すると、同じような一致が超伝導体の場合にも成り立つのではないかと期待できる。実際、後で説明するように、トポロジカル不変量を定義するには、ホール係数のような量子ホール系特有の概念は必要でなく、系の安定性を保証するエネルギーギャップの存在があれば十分である。また、先の議論では、トポロジカル不変量とエッジ状態の関係を、量子ホール係数  $\sigma_{xy}$  を使って議論したが、下で説明する「バルク・エッジ対応」

をつかうと、ホール係数を経由しなくても、トポロジカル不変量とエッジ状態の関係が成り立つと考えることができる。したがって、超伝導状態に対しても、トポロジカル不変量を導入すれば、超伝導状態のエッジ状態であるアンドレーフ束縛状態の有無がトポロジカル不変量を使って議論できると期待することも、それほど不自然ではないだろう。

以下では、超伝導状態に対して、トポロジカル不変量を導入し、それを使って、実際に、アンドレーフ束縛状態の有無が期待どおりに記述できることを示そう。

このように、トポロジカル不変量を使って超伝導体の性質を議論する場合、トポロジカル不変量がゼロでない超伝導体のことを、「トポロジカル超伝導体」と呼ぶ。

## 4 バルク・エッジ対応

これから先の議論では、「バルク・エッジ対応」と呼ばれる、バルクで定義されるトポロジカル不変量とエッジに現れるギャップレス状態との対応関係が重要となる。ここでは、トポロジカル不変量がどのようにして定義されるか説明し、その後、なるべく直感的に分かりやすい形で、「バルク・エッジ対応」を説明することにしよう。

### 4.1 トポロジカル不変量

まず、バルクの波動関数に対してトポロジカル不変量を定義しよう。後でいくつかの例を使って、トポロジカル不変量の具体的な定義を与えるが、ここではまず直感的なアイデアを説明しよう。

今、考えたい系（量子ホール系や超伝導体など）には境界がなく、バルクの波動関数が運動量空間で与えることが可能であると仮定する。このとき、図2のようにあるバンドまではきっちりと占有されていて、そこから上のバンドは完全に空になっている、ある意味「バンド絶縁体」に系がなっているとする。言い換えると、系は、励起状態をつくるのに有限のエネルギーが必要なギャップのある状態であるとする。このとき、占有されたバンドの波動関数を使って、トポロジカル不変量を定義することができる。

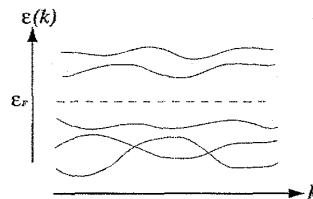


図 2: バンドスペクトラムの様子。フェルミエネルギーはバンドギャップ内にあると仮定する。 $\epsilon_F$  より下のエネルギーバンドは電子あるいは準粒子によって完全に占有されている。

今、バンドの波動関数を  $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  とおくと、 $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  は、ブリルアンゾーンの一点  $\mathbf{k}$  から、波動関数が定義されている空間であるヒルベルト空間上の一点  $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  への写像となっている。した

がって、波動関数  $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  として占有された波動関数を使うと、占有されているブリルアンゾーン (BZ) 全体が、ヒルベルト空間へどのように写像されるかを考えることが可能となる。(図 3)

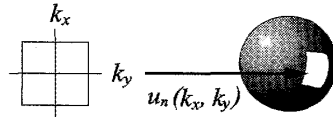


図 3: ブリルアンゾーンからヒルベルト空間への写像。簡単のため、ヒルベルト空間を球面で表す。2次元ブリルアンゾーンが、球面であるヒルベルト空間上に写像されている。

このとき、波動関数の種類によっては、ヒルベルト空間内に写像されたブリルアンゾーンが、ヒルベルト空間全体になんらかの意味で「巻きついている」場合がある。このような場合に、ブリルアンゾーンの像がヒルベルト空間全体に何回「巻きついているか」数えあげると、その「巻きつき数」が、トポロジカル不変量となる。実際、この「巻きつき数」は、もともとの定義から、整数に量子化された値しかとることができないから、理論に含まれるパラメータ (たとえば、化学ポテンシャルなど) を連続的に変化させても、特別なことが起きて巻きつき数が不連続に変化しない限り、その値を変えることができない。

では、どういう特別なことが起きれば、この「巻きつき数」が不連続に変化するだろうか。それは、系のギャップが閉じてしまい、「巻きつき数」がうまく定義できなくなる時である。たとえば、図 4にあるように、占有されているバンドと占有されていないバンドの間のギャップが閉じてしまった場合を考えてみよう。このとき、ギャップが閉じている運動量  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_P$  では、占有できる状態が 2 つあり一意にヒルベルト空間内の点への写像を定義することができなくなっている。このため、「巻きつき数」もうまく定義できなくなる。したがって、占有されているバンドと占有されていないバンドの間に再びギャップが開き、トポロジカル不変量が定義できるようになった時、「巻きつき数」はギャップが閉じる前の値から、不連続に変わることが可能となる。以下では、トポロジカル不変量のもつこの著しい性質を使って、「バルク・エッジ対応」を導こう<sup>3</sup>。

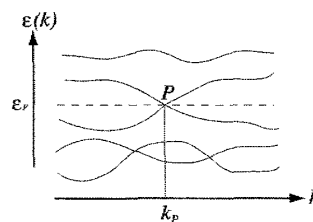


図 4: ギャップが閉じた場合。点  $P$  では占有できる状態が一意でなくなっている。

<sup>3</sup>ある種の「巻きつき数」に対しては、それがうまく定義できなくなる場合として、ここで挙げたエネルギーギャップが閉じる場合以外も考えられる。たとえば、「巻きつき数」には、時間反転対称性など系のもつ特別な対称性を使ってヒルベルト空間を制限することで、うまく定義されているものもある。この場合、これらの対称性を破ると、ヒルベルト空間の制限がなくなり、途端に「巻きつき数」が定義できなくなる。しかし、このような場合でも、仮定している対称性を壊さずにエッジを作ることが可能な場合には、同様の議論より「バルク・エッジ対応」が成り立つ。

## 4.2 バルク・エッジ対応

バルク・エッジ対応とは、トポロジカル不変量とエッジ状態の間に成り立つと呼ばれる次の性質である。

★ 今、バルクの波動関数を使って、トポロジカル不変量  $\nu$  が定義でき、その値がゼロでなかったとする。このとき、その系に端を作るとその端に局在したギャップレスな状態が現れる。

この対応を理解するために、図5に書いたようにトポロジカル不変量  $\nu$  がゼロでない物質をトポロジカル不変量  $\nu$  がゼロの単なる絶縁体に接合した系を考えてみよう。このとき、図5a)の左端から始めて位置  $x$  の正の方向に移動していくと、トポロジカル不変量は、接合面  $x = x_e$  で  $\nu \neq 0$  から  $\nu = 0$  に不連続に変わる。したがって、4.1章で述べたトポロジカル不変量の性質を思い出すと、 $\nu$  が不連続に変化している接合面では、一度系のギャップが閉じないといけないことになる。特に、単なる絶縁体として真空を考えると、これは、 $\nu \neq 0$  の物質の端に、かならず局在したギャップレスモードが存在することを意味している。つまり、上で述べたバルク・エッジ対応が成り立つ。

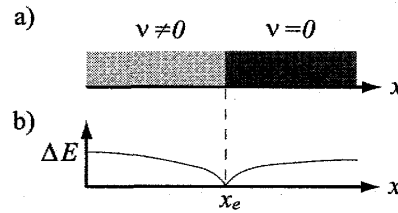


図5: a) トポロジカル不変量  $\nu$  がゼロでない物質とゼロである物質の接合系。b) 系のギャップ  $\Delta E$  の様子。

ここで、与えたバルク・エッジ対応の議論は、いくぶん抽象的かつ直観的であったが、いくつかのモデルでは、もっと厳密にこの対応は証明されている [15]。本稿では、厳密な証明を与える代わりに、以下の章において、色々な超伝導体に対して、バルク・エッジ対応が成り立つことを具体的に確認していくことにしよう。

## 5 1 バンド超伝導体

この章では、超伝導ギャップが1成分で与えられる比較的簡単な超伝導状態を考え、そこでバルク・エッジ対応がどのように実現されるかみていくことにする。

まず、単一のバンドで記述できる超伝導状態を考えると、そのハミルトニアンは

$$H = \sum_{k\sigma} \epsilon(k) c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{k\sigma\sigma'} \left[ \Delta(k)_{\sigma\sigma'} c_{k\sigma}^\dagger c_{-k\sigma'}^\dagger - \Delta(-k)_{\sigma\sigma'}^* c_{-k\sigma} c_{k\sigma'} \right] \quad (4)$$

で与えられる。ここで、 $\epsilon(\mathbf{k})$  は常伝導状態での電子のエネルギー、 $c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$  ( $c_{\mathbf{k}\sigma}$ ) は運動量  $\mathbf{k}$  スピン  $\sigma$  の電子の生成演算子 (消滅演算子)、 $\Delta(\mathbf{k})$  はギャップ関数である。このハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\sigma\sigma'} (c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, c_{-\mathbf{k}\sigma'}) H_{4\times 4}(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\sigma'} \\ c_{-\mathbf{k}\sigma'}^\dagger \end{pmatrix}, \quad H_{4\times 4}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \epsilon(\mathbf{k})\delta_{\sigma\sigma'} & \Delta(\mathbf{k})_{\sigma\sigma'} \\ \Delta^*(\mathbf{k})_{\sigma'\sigma} & -\epsilon(-\mathbf{k})\delta_{\sigma\sigma'} \end{pmatrix} \quad (5)$$

のように書き直すことができ、準粒子の波動関数は  $H_{4\times 4}(\mathbf{k})$  の固有状態で与えられる。

特に、 $\Delta(\mathbf{k})$  としてスピン一重項超伝導状態

$$\Delta(\mathbf{k}) = i\psi(\mathbf{k})\sigma_y \quad (6)$$

あるいは、 $\mathbf{d}$  ベクトルが  $z$  方向を向いているスピン三重項超伝導状態

$$\Delta(\mathbf{k}) = id_z(\mathbf{k})\sigma_z\sigma_y, \quad d_x = d_y = 0 \quad (7)$$

を考えると

$$H = \sum_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger, c_{-\mathbf{k}\downarrow}) H(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow} \\ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} + \text{const.}, \quad H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \epsilon(\mathbf{k}) & \eta(\mathbf{k}) \\ \eta(\mathbf{k})^* & -\epsilon(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

の形にまとめることができる。ここで、 $\eta(\mathbf{k})$  は

$$\eta(\mathbf{k}) = \begin{cases} \psi(\mathbf{k}), & \text{スピン一重項超伝導の場合} \\ d_z(\mathbf{k}), & \text{スピン三重項超伝導で } d_x = d_y = 0 \text{ の場合} \end{cases} \quad (9)$$

である。この場合には、準粒子の波動関数は、 $2 \times 2$  行列  $H(\mathbf{k})$  の固有状態になる。

また、電子が完全に偏極してしまい、アップスピンをもつ電子しかない場合 (あるいはダウンスピンをもつ電子しかない場合) の超伝導状態も準粒子の波動関数は  $2 \times 2$  行列の固有状態となる。なぜなら、この場合にも、ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger, c_{-\mathbf{k}\uparrow}) H(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow} \\ c_{-\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \end{pmatrix} + \text{const.}, \quad H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \epsilon(\mathbf{k}) & \eta(\mathbf{k}) \\ \eta^*(\mathbf{k}) & -\epsilon(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (10)$$

となり、全体にかかった  $1/2$  の因子を除くと (8) と同じ形にまとまるからである。(10) 式では、アップスピンをもつ電子しかない場合を仮定しており、

$$\eta(\mathbf{k}) = \Delta_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{k}) \quad (11)$$

である。このとき、電子のフェルミ統計性より、 $\eta(-\mathbf{k}) = -\eta(\mathbf{k})$  がなりたつ。このような超伝導状態はスピンレス超伝導状態と呼ばれる。

以下では、とくにことわらない限り、準粒子のハミルトニアンが  $2 \times 2$  行列となるこれらの場合を考えることにしよう。



### 5.1 時間反転対称を保つ場合

初めに、通常の  $s$  波超伝導体や、高温超伝導体のように時間反転対称性が保たれていて、 $\eta(\mathbf{k})$  が実数になっている場合を考えよう。

まず、準粒子の波動関数を調べてみよう。今の場合、 $H(\mathbf{k})$  は  $2 \times 2$  の実行列

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \epsilon(\mathbf{k}) & \eta(\mathbf{k}) \\ \eta(\mathbf{k}) & -\epsilon(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (12)$$

であるから、その固有ベクトルである準粒子の波動関数  $|u(\mathbf{k})\rangle$  は、2 列実ベクトルで与えられる。

$$|u(\mathbf{k})\rangle = \begin{pmatrix} a(\mathbf{k}) \\ b(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad a(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}) \text{ は実数} \quad (13)$$

したがって、波動関数を 1 に規格化しておくと、 $a(\mathbf{k})^2 + b(\mathbf{k})^2 = 1$  より、

$$\begin{pmatrix} a(\mathbf{k}) \\ b(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha(\mathbf{k}) \\ \sin \alpha(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (14)$$

のように、準粒子の波動関数を角変数  $\alpha(\mathbf{k})$  で表すことができる。ここで、一般に、固有ベクトルには位相分だけ任意性があるため、 $|u(\mathbf{k})\rangle$  を実ベクトルに制限しても、

$$|u(\mathbf{k})\rangle \rightarrow -|u(\mathbf{k})\rangle \quad (15)$$

つまり、

$$\alpha(\mathbf{k}) \rightarrow \alpha(\mathbf{k}) + \pi \quad (16)$$

の自由度が残る。したがって、状態「 $\alpha(\mathbf{k})$ 」と状態「 $\alpha(\mathbf{k}) + \pi$ 」は同一の状態を表しており、準粒子の状態を指定するには、 $0 \leq \alpha(\mathbf{k}) < \pi$  の範囲の  $\alpha(\mathbf{k})$  だけを考えれば十分である。この範囲の  $\alpha(\mathbf{k})$  は、1 次元円上の点  $(\cos 2\alpha(\mathbf{k}), \sin 2\alpha(\mathbf{k}))$  と 1 対 1 対応しているので、結局のところ、この系の準粒子の波動関数の全体の空間 (= ヒルベルト空間) は 1 次元円と等価となる。

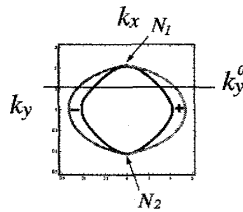


図 6:  $p_x$  超伝導体のギャップの様子。  $N_1$  および  $N_2$  にノードがあり、ブリルアンゾーン全体では、ギャップフルではないが、 $k_y = k_y^0$  の線に制限すると、ギャップフルである。

さて、トポロジカル不変量を導入しよう。その準備として、 $H(\mathbf{k})$  を対角化して、準粒子のスペクトルを求めると、

$$E(\mathbf{k}) = \pm \sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + \eta(\mathbf{k})^2} \quad (17)$$

となる。これからわかるように、 $\epsilon(\mathbf{k}) = 0$  および  $\eta(\mathbf{k}) = 0$  の2式が満たされると空のバンド ( $E(\mathbf{k}) \geq 0$  のバンド) と占有されたバンド ( $E(\mathbf{k}) \leq 0$  のバンド) 間のエネルギーギャップがゼロになってしまう。一般に、3次元や2次元のブリルアンゾーン全体を考えると、 $\epsilon(\mathbf{k}) = 0$  および  $\eta(\mathbf{k}) = 0$  の2つの条件を同時に満たすことは容易であり、たとえば、図6に示すような  $p_x$  波超伝導では、 $N_1$  および  $N_2$  の2つのラインノード上で、この条件が成り立ち、ギャップが閉じることになる。先に述べたように、トポロジカル不変量がうまく定義できるのは、空のバンドと占有されたバンドの間に、エネルギーギャップがある状況だけなので、これは、ブリルアンゾーン全体では、うまくトポロジカル不変量を定義できないことを意味している。

ところが、ブリルアンゾーンを特定の運動量を固定した部分空間に制限すると、ギャップが閉じない状況を作り出すことが可能である。たとえば、 $p_x$  波超伝導体で、 $y$  方向の運動量  $k_y$  をパラメータの一種として扱い、図6の  $k_y^0$  に固定すると、 $x$  方向に伸びた「ギャップのある1次元系」と考えることができる。そこで、この1次元系に対して、トポロジカル不変量を定義してみよう。

この「ギャップのある1次元系」のブリルアンゾーンは  $-\pi \leq k_x < \pi$  で、 $k_x = -\pi$  と  $k_x = \pi$  とが同一視されることに注意すると、本質的に1次元円である。また、上に示したように、今の場合、ヒルベルト空間も1次元円である。よって、準粒子の波動関数によって、1次元円であるブリルアンゾーンは1次元円であるヒルベルト空間に写像されることになる。したがって、ブリルアンゾーンの像がヒルベルト空間の1次元円を何回巻いているか、巻きつき数を数えると、それが求めるトポロジカル不変量となる。

付録A.1に与えるように、この巻きつき数は数式で表すと、次のようになる。

$$\nu_{1d}(k_y^0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x \epsilon^{ab} m_a \partial_{k_x} m_b \Big|_{k_y=k_y^0} \quad (18)$$

ここで、 $m_a(\mathbf{k})$  ( $a = 1, 2$ ) は

$$m_1 = \frac{\epsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + \eta(\mathbf{k})^2}}, \quad m_2 = \frac{\eta(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + \eta(\mathbf{k})^2}}, \quad (19)$$

である。また、この式を評価するには、同じく付録A.1で証明した以下の公式を使うと便利である。

$$\nu_{1d}(k_y^0) = -\frac{1}{2} \sum_{k_x \in \text{フェルミ面}} \text{sgn}[\eta(k_x, k_y^0)] \cdot \text{sgn}[\partial_{k_x} \epsilon(k_x, k_y^0)] \quad (20)$$

まず、(20)の公式とバルク・エッジ対応を使って、2章で説明したアンドレーフ束縛状態の公式を再現できることを示そう。そのため、図7のように、フェルミ面が1つしかブリルアンゾーン内になく、単純な円で近似できる場合を特に考えることにする。このとき、フェルミ面と交わる  $k_x$  の値は図7中の  $k_x = a$  と  $k_x = -a$  の2点しかなく、そこでは  $\partial_{k_x} \epsilon(k_x, k_y)$  の符号は互いに異なっている。したがって、(20)より

$$\nu_{1d}(k_y^0) = -\frac{1}{2} [\text{sgn}[\eta(a, k_y^0)] - \text{sgn}[\eta(-a, k_y^0)]] \cdot \text{sgn}[\partial_{k_x} \epsilon(k_x, k_y^0) |_{k_x=a}] \quad (21)$$

が成り立つ。この式より、 $\eta(k_x, k_y)\eta(-k_x, k_y) > 0$  が成り立つ時には、式(21)の  $k_x = a$  からの寄与と、 $k_x = -a$  からの寄与が打ち消しあって、 $\nu_{1d}(k_y^0) = 0$  となる。逆に、 $\eta(k_x, k_y)\eta(-k_x, k_y) < 0$  が

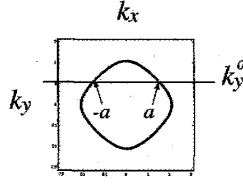


図 7: 単純な円で近似できるフェルミ面。

成り立つ時には、 $\nu_{1d}$  はゼロでなくなって、 $\nu_{1d}(k_y^0) = 1$  あるいは  $\nu_{1d}(k_y^0) = -1$  となる。したがって、バルク・エッジ対応を使うと、 $\nu_{1d}(k_y^0)$  がゼロでない、つまり  $\eta(k_x, k_y)\eta(-k_x, k_y) < 0$  が成り立つ時には、かならずギャップレスエッジ状態が端に現れることがわかる。また、 $\eta(k_x, k_y)\eta(-k_x, k_y) > 0$  が成り立つ時には、ギャップレスエッジ状態が存在する理由がないこともわかる。これは、まさに 2 章で紹介したアンドレーフ束縛状態の存在条件を再現している。

実際のエッジ状態の様子を

$$\epsilon(\mathbf{k}) = -2t_x \cos k_x - 2t_y \cos k_y - \mu, \quad \eta(\mathbf{k}) = d_z(\mathbf{k}) = d \sin k_x \quad (22)$$

の場合を例にもっと詳しく見てみよう。そのために、まず、このハミルトニアンを再現する正方格子上の格子模型を作ろう。いま、

$$c_{i\sigma}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}i} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \quad (23)$$

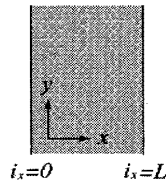
の関係式を使うと、運動量空間のハミルトニアン (8) は実空間上のハミルトニアン

$$H = \sum_{ij} (c_{i\uparrow}^\dagger, c_{i\downarrow}^\dagger) H_{ij} \begin{pmatrix} c_{j\uparrow} \\ c_{j\downarrow} \end{pmatrix}, \quad H_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{ij} & \eta_{ij} \\ \eta_{ji}^* & -\epsilon_{ji} \end{pmatrix} \quad (24)$$

に書きなおすことができる。ここで、(22) の  $\epsilon(\mathbf{k})$ 、 $\eta(\mathbf{k})$  を再現するには、

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= -t_x(\delta_{j,i+\hat{x}} + \delta_{i,j+\hat{x}}) - t_y(\delta_{j,i+\hat{y}} + \delta_{i,j+\hat{y}}) - \mu\delta_{i,j}, \\ \eta_{ij} &= -id(\delta_{i,j+\hat{x}} - \delta_{j,i+\hat{x}})/2 \end{aligned} \quad (25)$$

としておけばよい。


 図 8:  $x$  方向には端があり、 $y$  方向には拡がっている超伝導体

ここで、図 8 にあるように、超伝導体が  $y$  方向には無限に拡がっているが、 $x$  方向には  $i_x = 0$  と  $i_x = L$  に端があるような場合を考えよう。この時、 $y$  方向の運動量  $k_y$  は保存しているので、準

粒子スペクトルを求めるには、 $y$  方向だけ再び運動量空間に戻したハミルトニアン

$$\begin{aligned} H_{i_x, j_x}(k_y) &= \begin{pmatrix} \epsilon_{i_x, j_x}(k_y) & \eta_{i_x, j_x}(k_y) \\ \eta_{j_x, i_x}(k_y) & -\epsilon_{j_x, i_x}(-k_x) \end{pmatrix}, \\ \epsilon_{i_x, j_x}(k_y) &= -t_x(\delta_{j_x, i_x+1} + \delta_{i_x, j_x+1}) - 2t_y \cos k_y \delta_{i_x, j_x} - \mu \delta_{i_x, j_x}, \\ \eta_{i_x, j_x}(k_y) &= -id(\delta_{i_x, j_x+1} - \delta_{j_x, i_x+1}), \end{aligned} \quad (26)$$

を対角化すればよい。ここで、 $0 \leq i_x, j_x \leq L$  である。 $L$  を十分大きくとると、端同士の相互作用や有限サイズ影響は無視できるので、この場合の準粒子スペクトルで、端のない場合と異なっている部分は、端の部分に局在したエッジ状態に対応することになる。

図 9 に、 $t_x, t_y$  を色々な値にとった場合のエネルギー・スペクトルを示す。トポロジカル不変量  $\nu_{1d}(k_y)$  がゼロでない  $k_y$  のところだけに、 $E = 0$  のエッジ状態があり、バルク・エッジ対応が成り立っていることが確認できる。

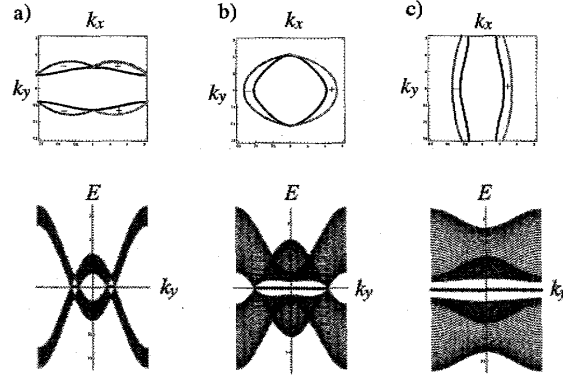


図 9: (22) 式の  $\epsilon(\mathbf{k})$  と  $\eta(\mathbf{k})$  で記述される系のエッジ状態の様子。上図は、フェルミ面とその上での超伝導ギャップの様子、下図は、(22) を対角化して得られる準粒子スペクトルである。ハミルトニアンのパラメータは、a)  $t_x = 0.2, t_y = 1$ 、b)  $t_x = t_y = 1$ 、c)  $t_x = 1, t_y = 0.2$  である。また、 $\mu$  と  $d$  はすべての場合で共通で、 $\mu = -1, d = 0.5$  である。

ここまでは、バルク・エッジ対応を使って、以前から知られているアンドレーフ束縛状態の生成条件が再現されることを見てきた。実は、バルク・エッジ対応は、もっと多くの情報を含んでいる。これを示すために、次の  $\epsilon(\mathbf{k})$ 、 $\eta(\mathbf{k})$  をもつ系を考えてみよう。

$$\text{a) } \epsilon(\mathbf{k}) = -2t_x \cos k_x - 2t_y \cos k_y - 2t'_x \cos 2k_x - \mu, \quad \eta(\mathbf{k}) = d \sin k_x, \quad (27)$$

$$\text{b) } \epsilon(\mathbf{k}) = -2t_x \cos k_x - 2t_y \cos k_y - 2t'_x \cos 2k_x - \mu, \quad \eta(\mathbf{k}) = d \sin 2k_x. \quad (28)$$

図 10 に示すように、ハミルトニアンのパラメータを  $t_x = t'_x = 0.7, t_y = 1, \mu = -1, d = 0.5$  に選ぶと、上の a)、b) どちらの場合においても、ブリルアンゾーン内にフェルミ面が 2 つ現れる。また、a)、b) いずれの場合も  $\eta(k_x, k_y)\eta(-k_x, -k_y) < 0$  が満たされている。したがって、2 章で紹介した従来のアンドレーフ束縛状態の判定法を単純に適用すると、どちらの場合においても、同じようにギャップレスアンドレーフ束縛状態が存在するはずである。ところが、実際には、図 10 か

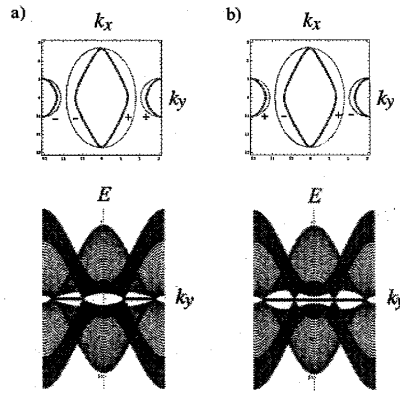


図 10: フェルミ面が複数ある場合のアンドレーフ束縛状態の様子。 $\epsilon(\mathbf{k})$ 、 $\eta(\mathbf{k})$  は a) の場合が (27)、b) の場合が (28)。ハミルトニアンのパラメータは、どちらの場合にも、 $t_x = t'_x = 0.7$ ,  $t_y = 1$ ,  $\mu = -1$ ,  $d = 0.5$ 。 $k_y = 0$  付近のゼロエネルギー状態の様子が違うことに注意。

らわかるように  $k_y = 0$  近辺のギャップレスアンドレーフ状態に違いが生じる。つまり、a) の場合には、 $k_y = 0$  近辺にギャップレス状態が存在していないのに対して、b) の場合には  $k_y = 0$  の近辺に  $E = 0$  の状態が存在している。この違いは、従来のアンドレーフ束縛状態の判定法では説明つかない現象である。

一方、バルク・エッジ対応をつかうと、この違いは明快に理解できる。今 a)、b) それぞれの場合に、 $k_y = 0$  の近辺の  $\nu_{1d}(k_y)$  を計算してみよう。 $k_y = 0$  の近辺では、 $k_y = \text{const.}$  の直線は 2 つのフェルミ面とそれぞれ 2 点で交わっている。このとき、各フェルミ面ごとの  $\nu_{1d}$  の寄与は、1 つしかフェルミ面がない場合と同様に計算できて、それぞれ大きさの等しいゼロでない値をとる。ところが、2 つのフェルミ面からの寄与を足し上げると、a) の場合には、それぞれのフェルミ面からの寄与の符号が反対であるため、打ち消しが起こって、 $\nu_{1d}(k_y) = 0$  になるのに対して、b) の場合には、それぞれのフェルミ面からの寄与の符号が同じため、足し上げが起こって、 $\nu_{1d}(k_y) = -2$  となる。このため、a) の場合には  $k_y = 0$  の近辺に、ギャップレスエッジ状態がなくなり、b) の場合にはギャップレス状態が現れることになるのである。

最後に、 $s$  波超伝導体に対しては、 $\nu_{1d}(k_y) = 0$  がいつでも成り立つことを見ておこう。この性質は付録 A.1 に与えた (148) 式から理解できる。まず、 $s$  波超伝導状態では、 $\eta(\mathbf{k})$  は定数であるから、(19) 式中の  $m_2$  の符号は  $k_x$  の値によって変化しない。したがって、付録 A.1 の (143) 式と (19) 式より、 $\sin \theta(\mathbf{k})$  の符号も変化できず、結局、(148) 式から、巻きつき数がゼロ、つまり  $\nu_{1d} = 0$  が成り立つことがわかる。言い換えると、 $s$  波超伝導体はトポロジカル超伝導体ではなく、ギャップレスエッジ状態も現れない。

## 5.2 時間反転対称性が破れた場合

つぎに、 $\eta(\mathbf{k})$  が複素数になっていて、時間反転対称性が破れている場合を考えてみよう。この場合の  $H(\mathbf{k})$  は

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \epsilon(\mathbf{k}) & \eta(\mathbf{k}) \\ \eta^*(\mathbf{k}) & -\epsilon(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (29)$$

である。このような超伝導体の例としては、 $p$  波カイラル超伝導体が考えられる。この場合には、 $\eta(\mathbf{k}) = k_x + ik_y$  である。

まず、(29) で記述される超伝導体の準粒子スペクトルをしらべてみよう。(29) で与えられる準粒子励起スペクトルは

$$E(\mathbf{k}) = \sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + |\eta(\mathbf{k})|^2} \quad (30)$$

となるので、

$$\epsilon(\mathbf{k}) = 0, \quad \text{Re}\eta(\mathbf{k}) = 0, \quad \text{Im}\eta(\mathbf{k}) = 0 \quad (31)$$

の3つの条件が満たされれば、エネルギーギャップが閉じることになる。3次元ブリルアンゾーンの場合、この3つの条件は、各条件があたえる3つの曲面の交点で容易に満たすことができる。いかえると、特別なこと(フェルミ面が2次元的であるなど)がない限り、3次元ブリルアンゾーン内には超伝導ギャップが閉じる点(ポイントノード)が現れる。たとえば、 $p$  波カイラル超流動体である  $^3\text{He}$  A 相の場合には、図 11 のように、フェルミ面の北極と南極に超伝導ギャップの閉じたポイントノードが現れる。しかし、この場合でも、図 11 に示すように  $k_z$  の値をパラメータと思い一定値に固定して「 $xy$  方向に広がった2次元理論」をかんがえてみると、ギャップが閉じない状況を作り出すことができる。これは、 $k_x$ - $k_y$  空間という2次元空間では、特別な場合を除くと、3つの条件(31)を同時に満たすことが不可能であるからである。以下では、このようにして作った2次元理論で、トポロジカル不変量を定義してみよう。

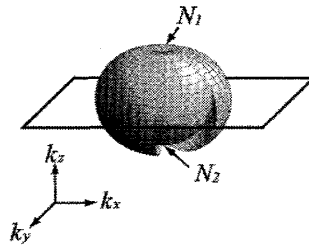


図 11: カイラル  $p$  波超伝導のギャップの様子。球面のフェルミ面 (内部の球面) を仮定し、そこでのギャップの大きさを示してある。北極  $N_1$  と南極  $N_2$  では超伝導ギャップが閉じている。一方、図中の  $k_z = \text{一定}$  の2次元ブリルアンゾーン面内では、超伝導ギャップは閉じていない。

5.1 章と同様に、トポロジカル不変量を定義するため、準粒子の波動関数全体の空間を調べてみよう。ハミルトニアン  $H(\mathbf{k})$  は  $2 \times 2$  複素行列であるから、準粒子の波動関数  $|u(\mathbf{k})\rangle$  は2列の複素

ベクトルで与えられる。ノルムを1に規格化すると、 $|u(\mathbf{k})\rangle$  は

$$|u(\mathbf{k})\rangle = \begin{pmatrix} \cos \alpha(\mathbf{k}) e^{-i\beta(\mathbf{k})} \\ \sin \alpha(\mathbf{k}) e^{-i\gamma(\mathbf{k})} \end{pmatrix} \quad (32)$$

の形に取ることができる。(  $\alpha(\mathbf{k})$ ,  $\beta(\mathbf{k})$ ,  $\gamma(\mathbf{k})$  は、それぞれ、 $0 \leq \alpha(\mathbf{k}) < \pi/2$ ,  $0 \leq \beta(\mathbf{k}) < 2\pi$ ,  $0 \leq \gamma(\mathbf{k}) < 2\pi$  を満たす。) さらに固有ベクトルは一意でなく、任意の  $\theta(\mathbf{k})$  に対して

$$|u(\mathbf{k})\rangle \rightarrow e^{i\theta(\mathbf{k})} |u(\mathbf{k})\rangle \quad (33)$$

の変換を行う自由度があるので、 $\gamma(\mathbf{k}) = 0$  とできて

$$|u(\mathbf{k})\rangle = \begin{pmatrix} \cos \alpha(\mathbf{k}) e^{-i\beta(\mathbf{k})} \\ \sin \alpha(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (34)$$

となる。この  $|u(\mathbf{k})\rangle$  をつかって、 $\langle u(\mathbf{k}) | \sigma_i | u(\mathbf{k}) \rangle$  を計算すると

$$\begin{aligned} & (\langle u(\mathbf{k}) | \sigma_1 | u(\mathbf{k}) \rangle, \langle u(\mathbf{k}) | \sigma_2 | u(\mathbf{k}) \rangle, \langle u(\mathbf{k}) | \sigma_3 | u(\mathbf{k}) \rangle) \\ &= (\sin 2\alpha(\mathbf{k}) \cos \beta(\mathbf{k}), \sin 2\alpha(\mathbf{k}) \sin \beta(\mathbf{k}), \cos 2\alpha(\mathbf{k})) \end{aligned} \quad (35)$$

となるので、準粒子の波動関数  $|u(\mathbf{k})\rangle$  は、2次元球面上の点

$$(\sin 2\alpha(\mathbf{k}) \cos \beta(\mathbf{k}), \sin 2\alpha(\mathbf{k}) \sin \beta(\mathbf{k}), \cos 2\alpha(\mathbf{k})) \quad (36)$$

に1対1対応している。したがって、準粒子の波動関数全体のつくるヒルベルト空間は2次元球面  $S^2$  である。

ヒルベルト空間が2次元球面であることがわかると、トポロジカル不変量は次のようにして定義できる。 $xy$  方向に捻がった2次元理論のブリルアンゾーンは  $k_i = -\pi$  と  $k_i = \pi$  ( $i = x, y$ ) を同一視した領域  $\{(k_x, k_y) | -\pi \leq k_x < \pi, -\pi \leq k_y < \pi\}$  であり、2次元トーラスと等価である。したがって、 $|u(\mathbf{k})\rangle$  は、2次元トーラスであるブリルアンゾーンから2次元球面であるヒルベルト空間上への写像となっている。このとき、2次元球面に写像された2次元トーラスの像が2次元球面を何回覆っているかという巻きつき数を勘定すると、これがトポロジカル不変量となる。

付録 A.2 に与えたように、この巻きつき数は、数式では

$$\nu_{2d} = -\frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x dk_y \epsilon^{ij} \epsilon^{abc} m_a(\mathbf{k}) \partial_{k_i} m_b(\mathbf{k}) \partial_{k_j} m_c(\mathbf{k}) \quad (37)$$

の形で与えられる。ここで、 $m_a(\mathbf{k})$  ( $a = 1, 2, 3$ ) は

$$m_1(\mathbf{k}) = \frac{\text{Re}\eta(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + |\eta(\mathbf{k})|^2}}, \quad m_2(\mathbf{k}) = \frac{\text{Im}\eta(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + |\eta(\mathbf{k})|^2}}, \quad m_3(\mathbf{k}) = \frac{\epsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + |\eta(\mathbf{k})|^2}}, \quad (38)$$

で定義される関数である。更に、この積分は、付録 A.2 に示した次の公式

$$\nu_{2d} = -\frac{1}{2} \sum_{\eta(\mathbf{k}^0)=0} \text{sgn}[\epsilon(\mathbf{k}^0)] \text{sgn}[\det \partial_{k_i} \eta_j(\mathbf{k}^0)] \quad (39)$$

を使うと簡単に評価できる。(ここで、 $\eta_1(\mathbf{k}) = \text{Re}\eta(\mathbf{k})$ 、 $\eta_2(\mathbf{k}) = \text{Im}\eta(\mathbf{k})$ 。)

ここで、この巻きつき数  $\nu_{2d}$  がゼロでない場合に、ギャップレスエッジ状態が現れることを具体例で確認しておこう。モデルとしては、 $\epsilon(\mathbf{k})$  と  $\eta(\mathbf{k})$  が

$$\epsilon(\mathbf{k}) = -2t_x \cos k_x - 2t_y \cos k_y - \mu, \quad \eta(\mathbf{k}) = d_z(\mathbf{k}) = d(\sin k_x + i \sin k_y) \quad (40)$$

で与えられる 2 次元  $p$  波カイラル超伝導体を考えよう。モデルのパラメーターを

$$\text{a) } t_x = 0.2, \quad t_y = 1, \quad \mu = -1, \quad d = 0.5, \quad (41)$$

$$\text{b) } t_x = 1, \quad t_y = 1, \quad \mu = -1, \quad d = 0.5, \quad (42)$$

$$\text{c) } t_x = 1, \quad t_y = 0.2, \quad \mu = -1, \quad d = 0.5, \quad (43)$$

に選んだ時に得られるフェルミ面とエッジ状態の様子を図 12 に示す。公式 (39) を使うと、 $\nu_{2d}$  の値は、それぞれ、a)  $\nu_{2d} = 0$ , b)  $\nu_{2d} = 1$ , c)  $\nu_{2d} = 0$  である。a) および、b) の場合には、バルク・

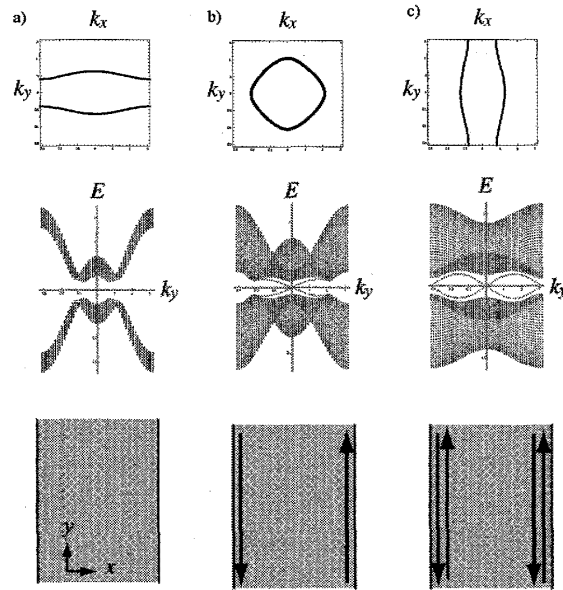


図 12: (40) 式で定義されるカイラル  $p$  波超伝導体のエッジ状態の様子。(上段) フェルミ面の様子。(中段) 端のある形状での準粒子のスペクトル。ギャップレスモードはエッジに局在している。(下段) エッジ状態の様子。矢印の付いた線は、そのエッジに局在したギャップレスモードとその群速度の方向を表す。パラメータは、a)  $t_x = 0.2, t_y = 1, \mu = -1, d = 0.5$ 、b)  $t_x = 1, t_y = 1, \mu = -1, d = 0.5$ 、c)  $t_x = 1, t_y = 0.2, \mu = -1, d = 0.5$ 。

エッジ対応どおりに、a) の場合にはギャップレスエッジ状態がなく、b) の場合にはギャップレスエッジ状態が存在している。c) の場合には、 $\nu_{2d} = 0$  に関わらず、ギャップレス状態があるため、バルク・エッジ対応が一見成り立っていないように思われるが、このギャップレス状態は前に導入した  $\nu_{1d}(k_y)$  によってその存在が説明できる。 $k_y = 0, \pi$  のときには、このモデルのギャップ関数は

$$\eta(\mathbf{k}) = d \sin k_x \quad (44)$$



と実数となるため、5.1章で導入した  $\nu_{1d}(k_y)$  が定義できるからである。c) の場合にこの値を計算すると、 $k_y = 0$ 、 $k_y = \pi$  いずれの場合も、 $\nu_{1d}(k_y) = -1$  となり、その結果、 $k_y = 0$  と  $k_y = \pi$  のところにギャップレスエッジ状態があることが理解できる。

### 5.3 幾何学的位相、量子ホール効果との類似性

今までは、巻きつき数としてトポロジカル不変量を定義してきた。しかし、通常、量子ホール系においては、幾何学的位相 (いわゆる Berry 位相) をつかいトポロジカル不変量が定義される。ここでは、幾何学的位相をつかってトポロジカル不変量を定義する方法を紹介し、先に定義した巻きつき数としてのトポロジカル不変量との関連を明らかにしよう。

まず準備として、幾何学的位相について復習しておこう。幾何学的位相を導入するには、占有されているバンド状態  $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  に対して以下の「ゲージ場」 $A_i(\mathbf{k})$  を定義するのが便利である。

$$(A_i(\mathbf{k}))_{nm} = i\langle u_n(\mathbf{k}) | \frac{\partial}{\partial k_i} | u_m(\mathbf{k}) \rangle \quad (45)$$

ここで、 $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  のノルムは1に規格化しておく。 $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  の位相は一意に決まらず、

$$|u_n(\mathbf{k})\rangle \rightarrow e^{i\theta_n(\mathbf{k})} |u_n(\mathbf{k})\rangle \quad (46)$$

という自由度が残っているが、これは  $A_i(\mathbf{k})$  のゲージ変換 (の一部)

$$A_i(\mathbf{k}) \rightarrow U^\dagger(\mathbf{k}) A_i(\mathbf{k}) U(\mathbf{k}) + iU(\mathbf{k})^\dagger \partial_{k_i} U(\mathbf{k}), \quad U(\mathbf{k}) = \text{diag}(\dots, e^{i\theta_n(\mathbf{k})}, \dots) \quad (47)$$

である。また、もっと一般にバンド間の混合

$$|u_n(\mathbf{k})\rangle \rightarrow \sum_m |u_m(\mathbf{k})\rangle U_{mn}(\mathbf{k}) \quad (48)$$

を考えると、一般のユニタリー行列によるゲージ変換を得ることも可能である。

一般に、 $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  に対して、適当なユニタリー変換 (48) を行くと、閉じた経路  $C$  上に  $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  や  $A_i(\mathbf{k})$  の特異点が現れないようにできる。このとき、経路  $C$  上の線積分として、幾何学的位相  $\gamma$  を導入できる。

$$\gamma = \oint_C dk_i \text{tr} A_i(\mathbf{k}) = \sum_{n \in \text{occupied}} \oint_C dk_i i \langle u_n(\mathbf{k}) | \frac{\partial}{\partial k_i} | u_n(\mathbf{k}) \rangle \quad (49)$$

ここで、 $\gamma$  の値には不定性があることに注意しよう。つまり、 $C$  上で特異でない  $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  や  $A_i(\mathbf{k})$  は一意でなく、更に  $C$  上で特異でないゲージ変換  $U^{\text{reg}}(\mathbf{k})$  を行うことが可能である。この時、(47) と次の公式

$$\text{tr} [U^{\text{reg}\dagger} \partial_{k_i} U^{\text{reg}}] = \partial_{k_i} \ln [\det U^{\text{reg}}] \quad (50)$$

を使うと、 $\gamma$  の値は

$$\gamma \rightarrow \gamma + i \oint_C dk_i \partial_{k_i} \ln [\det U^{\text{reg}}] \quad (51)$$

と変更される。 $\det U^{\text{reg}}$  の一意性から  $N$  を適当な整数として

$$i \oint_C dk_i \partial_{k_i} \ln [\det U^{\text{reg}}] = 2\pi N \quad (52)$$

が成り立つので、結局、 $\gamma$  には、 $2\pi$  の整数倍の不定性がある。この不定性を使うと、 $\gamma$  の値は 角変数と同じように、 $0 \leq \gamma < 2\pi$  の範囲にすることがいつでも可能である。

### 5.3.1 $H(\mathbf{k})$ が実対称行列の場合

$H(\mathbf{k})$  が実対称行列の場合には、幾何学的位相  $\gamma$  をつかってトポロジカル不変量を定義することが可能である。

$H(\mathbf{k})$  が実行列の場合、 $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  が固有ベクトルであればその複素共役  $|u_n(\mathbf{k})\rangle^*$  も  $H(\mathbf{k})$  の同じ固有値を持つ固有ベクトルになる。したがって、固有値に縮退がなければ、占有されているバンド  $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  とその複素共役  $|u_n^*(\mathbf{k})\rangle$  は適当な位相  $\phi_n(\mathbf{k})$  を使って

$$|u_n(\mathbf{k})\rangle = e^{i\phi_n(\mathbf{k})} |u_n^*(\mathbf{k})\rangle \quad (53)$$

で関係づけられる。また、縮退がある場合も、適当なユニタリ行列  $V(\mathbf{k})$  を使って

$$|u_n(\mathbf{k})\rangle = \sum_m |u_m^*(\mathbf{k})\rangle V_{mn}(\mathbf{k}) \quad (54)$$

の関係がなりたつ。(53) は、(54) の特別な場合であるので、以下では (54) の場合のみを考えることにしよう。

今、 $C$  上で幾何学位相を定義するために、ユニタリ変換 (48) を作用させ、 $C$  上で特異でない  $|u'_n(\mathbf{k})\rangle$

$$|u'_n(\mathbf{k})\rangle = \sum_m |u_m(\mathbf{k})\rangle U_{mn}(\mathbf{k}) \quad (55)$$

が得られたとする。この時、(54) の関係より

$$\begin{aligned} |u'_n(\mathbf{k})\rangle &= \sum_{lm} |u_l^*(\mathbf{k})\rangle V_{lm}(\mathbf{k}) U_{mn}(\mathbf{k}) \\ &= \sum_{klm} |u'_k{}^*(\mathbf{k})\rangle U_{lk}(\mathbf{k}) V_{lm}(\mathbf{k}) U_{mn}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (56)$$

が成り立つ。 $C$  上で  $|u'_n(\mathbf{k})\rangle$  が特異でないとする、その複素共役  $|u'_n{}^*(\mathbf{k})\rangle$  も特異でなく、したがって、 $U^T V U$  も特異でない。この時、 $|u'_n(\mathbf{k})\rangle$  をつかって  $\gamma$  を計算すると

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{nlk} \oint dk_i i (U^\dagger V^\dagger U^*(\mathbf{k}))_{nl} \langle u'_l{}^*(\mathbf{k}) | \partial_{k_i} (|u'_k{}^*(\mathbf{k})\rangle (U^T V U(\mathbf{k}))_{kn}) \\ &= \sum_n \oint dk_i \langle u'_n{}^*(\mathbf{k}) | \partial_{k_i} |u'_n{}^*(\mathbf{k})\rangle + \oint dk_i i \text{tr} [U^\dagger V^\dagger U^* \partial_{k_i} (U^T V U)] \\ &= -\gamma + \oint dk_i i \partial_{k_i} \ln [\det U^T V U] \\ &= -\gamma + 2\pi M \quad (M \text{ は整数}) \end{aligned} \quad (57)$$

となる。(ここで、 $U^T V U$  が  $\mathbb{C}$  上で一意であることより、適当な整数  $M$  を使って

$$\oint dk_i i \partial_{k_i} \ln [\det U^T V U] = 2\pi M \quad (58)$$

が成り立つことを使った。) したがって、 $\gamma = \pi M$  が成り立つことがわかる。更に、先に述べた  $2\pi$  の整数倍の不定性をつかうと、今の場合、結局  $\gamma$  は  $\gamma = 0$  または  $\gamma = \pi$  のいずれかの値にすることができる。

この  $\gamma$  はトポロジカル不変量である。なぜなら離散的な値しか取れないために、理論に含まれるパラメータを連続的に変形させてもハミルトニアンが実行列である限り、容易にはその値を変えないからである。また、値が変わるのは、 $\mathbb{C}$  上のどこかで、占有しているバンドと空のバンドの間の縮退が生じて、 $A_i(\mathbf{k})$  がうまく定義できなくなる場合だけである。

この  $\gamma$  と 5.1 章で定義したトポロジカル不変量  $\nu_{1d}$  の関係を調べよう。5.1 章で考えたハミルトニアン (12) は実対称行列であるので、 $\gamma$  を使って、トポロジカル不変量を定義することも可能である。比較のために、閉じた経路  $C$  として、図 13 に書いたブリルアンゾーンを横切る  $k_y = k_y^0$  の直線をとることにする。この経路は、 $k_x$  によってパラメータ化されており、 $k_x = -\pi$  と  $k_x = \pi$  は、ブリルアンゾーンの同じ点であるので、閉じた経路となっている。

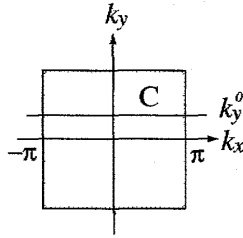


図 13: 閉じた経路  $C$

ハミルトニアン (12) で記述される超伝導状態の占有バンドの波動関数  $|u(\mathbf{k})\rangle$  は、付録 A.1 に示したように、

$$|u(\mathbf{k})\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta(\mathbf{k})/2) \\ \cos(\theta(\mathbf{k})/2) \end{pmatrix} \quad (59)$$

とかける。ここで、 $\theta(\mathbf{k})$  は

$$\cos \theta(\mathbf{k}) = \frac{\epsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + \eta(\mathbf{k})^2}}, \quad \sin \theta(\mathbf{k}) = \frac{\eta(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + \eta(\mathbf{k})^2}}, \quad (60)$$

で定義される量である。ところが、この  $|u(\mathbf{k})\rangle$  は  $\theta = 0$  と  $\theta = 2\pi$  という、同じハミルトニアンに対応するパラメータに対して異なる値をとる特異な固有ベクトルであるので、 $\gamma$  を計算するのに適さない。そこで、ゲージ変換でこの特異性を取り除いた

$$|u(\mathbf{k})\rangle = e^{-i\theta(\mathbf{k})/2} \begin{pmatrix} -\sin \theta(\mathbf{k})/2 \\ \cos \theta(\mathbf{k})/2 \end{pmatrix} \quad (61)$$

を考えることにする。この時、ゲージ場  $A_i(\mathbf{k})$  は

$$A_i(\mathbf{k}) = i\langle u(\mathbf{k}) | \partial_{k_i} | u(\mathbf{k}) \rangle = \frac{1}{2} \partial_{k_i} \theta(\mathbf{k}) \quad (62)$$

となる。したがって、 $\gamma$  は先に説明した  $2\pi$  の整数倍の不定性を考慮すると

$$\gamma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dk_x \partial_{k_x} \theta(\mathbf{k}) \Big|_{k_y=k_y^0} + 2\pi N, \quad (N \text{ は整数}) \quad (63)$$

となる。ここで、付録 A.1 の (148) より、 $\nu_{1d}$  は

$$\nu_{1d}(k_y^0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dk_x \partial_{k_x} \theta(\mathbf{k}) \Big|_{k_y=k_y^0} \quad (64)$$

と書き直せることをつかうと、結局

$$\gamma = \pi \nu_{1d}(k_y^0) + 2\pi N \quad (65)$$

が成り立つ。つまり、 $\gamma$  は新しいトポロジカル不変量ではなく、 $\nu_{1d}$  から計算される量である。

ここで、 $\nu_{1d} \neq 0$  であっても、 $\gamma = 0$  の場合があることに注意しよう。つまり、 $\nu_{1d}$  が偶数であれば、いつでも  $\gamma$  は不定性を使いゼロにできる、そのため、たとえば、 $\nu_{1d} = 0$  となりギャップレスエッジ状態が現れない場合と、 $\nu_{1d} = 2$  となりギャップレスエッジ状態が現れる場合を、 $\gamma$  では区別できない。したがって、 $\gamma$  は、ハミルトニアンが  $2 \times 2$  行列でなくても実行列であればいつでも定義できるという意味で便利なトポロジカル不変量であるが、 $2 \times 2$  行列のハミルトニアン (12) に限って言えば、エッジ状態などを記述するのに十分なトポロジカル不変量ではない。

### 5.3.2 $H(\mathbf{k})$ が複素エルミート行列の場合

次に、 $H(\mathbf{k})$  が複素エルミート行列の場合を考えてみよう。この場合には、(45) 式の  $A_i(\mathbf{k})$  に対して、次の式で定義される Thouless-Kohmoto-Nightingale-den Nijs (TKNN) 数、あるいはチャーン数と呼ばれる量がトポロジカル不変量になることが知られている [12]。

$$\nu_{\text{TKNN}} = \frac{1}{2\pi} \int dk_x dk_y \epsilon^{ij} \partial_{k_i} \text{tr} A_j(\mathbf{k}) \quad (66)$$

3 章でも触れたように、整数量子ホール系では、TKNN 数  $\nu_{\text{TKNN}}$  はホール伝導度  $\sigma_{xy}$  と

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \nu_{\text{TKNN}} \quad (67)$$

の関係があり、ホール係数の量子化は TKNN 数の量子化によって説明される<sup>4</sup>。

ここでは、5.2 章で導入した巻きつき数  $\nu_{2d}$  と TKNN 数  $\nu_{\text{TKNN}}$  の関係を調べてみよう。5.2 章では、 $2 \times 2$  の複素エルミート行列 (29) をハミルトニアン  $H(\mathbf{k})$  として考えた。このとき、占有されているバンドは 1 つであり、その波動関数は

$$H(\mathbf{k})|u(\mathbf{k})\rangle = -\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + |\eta(\mathbf{k})|^2} |u(\mathbf{k})\rangle \quad (68)$$

<sup>4</sup>チャーン数の説明や、ホール係数と  $\nu_{\text{TKNN}}$  の関係に関しては、[13] を見てほしい。

を満たす  $|u(\mathbf{k})\rangle$  である。ノルムが1に規格化された  $|u(\mathbf{k})\rangle$  を使って、(45) 式のゲージ場  $A_i(\mathbf{k})$  は

$$A_i(\mathbf{k}) = i\langle u(\mathbf{k}) | \frac{\partial}{\partial k_i} | u(\mathbf{k}) \rangle \quad (69)$$

と書け、TKNN 数  $\nu_{\text{TKNN}}$  は

$$\nu_{\text{TKNN}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2k \epsilon^{ij} \partial_{k_i} A_j(\mathbf{k}) \quad (70)$$

となる。一方、5.2 章に示したように、この系では、次の巻きつき数  $\nu_{2d}$

$$\nu_{2d} = -\frac{1}{8\pi} \int dk_x dk_y \epsilon^{ij} \epsilon^{abc} m_a \partial_{k_i} m_b \partial_{k_j} m_c \quad (71)$$

もトポロジカル不変量である。ここで、 $m_a(\mathbf{k})$  は (38) 式で定義される量である。

この2つのトポロジカル不変量を関係づけるために、まず、(35)、(38)、(158)、および (161) 式から導かれる

$$\langle u(\mathbf{k}) | \sigma_a | u(\mathbf{k}) \rangle = (-m_1(\mathbf{k}), m_2(\mathbf{k}), -m_3(\mathbf{k})) \quad (72)$$

を使って、(71) 中の  $m_a(\mathbf{k})$  を占有されている波動関数  $|u(\mathbf{k})\rangle$  で置き換える。更に、 $|u(\mathbf{k})\rangle$  を  $|u(\mathbf{k})\rangle = (f(\mathbf{k}), g(\mathbf{k}))^T$  と成分表示し、規格化条件より  $f(\mathbf{k})^* f(\mathbf{k}) + g(\mathbf{k})^* g(\mathbf{k}) = 1$  が成り立つことをつかうと、非常に煩雑な計算ののち

$$\epsilon^{ij} \partial_{k_i} A_j(\mathbf{k}) = -\frac{1}{4} \epsilon^{ij} \epsilon^{abc} m_a(\mathbf{k}) \partial_{k_i} m_b(\mathbf{k}) \partial_{k_j} m_c(\mathbf{k}) \quad (73)$$

を証明することができる。したがって、

$$\nu_{2d} = \nu_{\text{TKNN}} \quad (74)$$

が成り立ち、5.2 章で導入したトポロジカル数は、量子ホール系で導入されている TKNN 数そのものであることがわかる。また、5.2 章で示したバルク・エッジ対応は、整数量子ホール状態でのバルク・エッジ対応と同じある。

## 6 マヨラナ条件と渦の非可換統計性

ここまでは、量子ホール系との類似性を使い、超伝導状態のアンドレーフ束縛状態 (エッジ状態) を調べてきた。この章では、超伝導状態特有の性質を説明しよう。超伝導状態の大きな特徴の1つは、ギャップ関数によって電子と正孔が混じりあうことである。このために、エッジ状態はマヨラナフェルミオンとなり、また渦の非可換統計という興味深い現象が現れる。以下で、マヨラナフェルミオンについて説明し、またどのようにして渦が非可換統計に従うようになるか、見ていくことにしよう。

## 6.1 マヨラナ条件と電子・正孔対称性

まず、電子と正孔の混ざり合いがもたらす性質を一般の超伝導状態に対して調べてみよう。座標空間における電子の生成演算子を  $c_\sigma^\dagger(\mathbf{x})$  ( $\sigma$  と書くと、超伝導状態では、ギャップ関数によって電子と正孔が混じり合うため、そのハミルトニアンは、電子と正孔を混合した基底

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} c_\uparrow(\mathbf{x}) \\ c_\downarrow(\mathbf{x}) \\ c_\uparrow^\dagger(\mathbf{x}) \\ c_\downarrow^\dagger(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad c_\sigma^\dagger(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \quad (75)$$

をつかって

$$H = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \Psi^\dagger(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}) \quad (76)$$

の形で与えられる。このとき、 $\Psi(\mathbf{x})$  は

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Gamma \Psi^*(\mathbf{x}), \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ \mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

を満たすので、 $\Psi(\mathbf{x})$  (の基底上の波動関数) で記述される準粒子は、 $\Psi^*(\mathbf{x})$  で記述される反準粒子と本質的に同じとなる。このように、粒子と反粒子の交換のもとで、自己共役となっているフェルミオンは、素粒子物理学ではマヨラナフェルミオンと呼ばれている。また、実際に付録 B で示すように、適当なユニタリー変換を行うと、(77) 式は素粒子論で出てくるマヨラナ条件と完全に一致する。そこで、ここでも (77) の条件をマヨラナ条件と呼ぶことにしよう。このマヨラナ条件のため、超伝導状態の準粒子励起には、量子ホール系にない特徴が現れることになる。

ここでは、後の議論に便利のように、マヨラナ条件をつかって、ハミルトニアンの電子・正孔対称性を導いておこう。今、(77) 式を使うと、ハミルトニアン (76) は

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \Psi^T(\mathbf{x}) \Gamma^\dagger H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Gamma \Psi^*(\mathbf{y}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \Psi_i^\dagger(\mathbf{x}) (\Gamma^\dagger H(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \Gamma)_{ji} \Psi_j(\mathbf{y}) + \text{const.} \end{aligned} \quad (78)$$

と書きなおすことができる。更に、ここで得たハミルトニアンを元のハミルトニアンに足して 2 で割ると、

$$H = \frac{1}{4} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \Psi_i^\dagger(\mathbf{x}) \left[ H_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\Gamma^\dagger H(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \Gamma)_{ji} \right] \Psi_j(\mathbf{y}) + \text{const.} \quad (79)$$

となるので、

$$\frac{1}{2} \left[ H_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\Gamma^\dagger H(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \Gamma)_{ji} \right] \quad (80)$$

を改めて、 $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  と置きなおすと

$$\Gamma^\dagger H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Gamma = -H(\mathbf{x}, \mathbf{y})^* \quad (81)$$

がなりたち、ハミルトニアン  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  とハミルトニアンの複素共役  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})^*$  にマイナス符号をかけたものがユニタリ同値になることがわかる。この (81) の関係は、電子・正孔対称性とよばれている。

この電子・正孔対称性をつかうと、正エネルギー  $E = E_n > 0$  の準粒子状態と負エネルギー  $E = -E_n < 0$  の準粒子状態が必ず対をなしていることが分かる。なぜなら、 $E = E_n$  である準粒子状態  $|u_n(\mathbf{x})\rangle$  があって

$$\int d\mathbf{y} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |u_n(\mathbf{y})\rangle = E_n |u_n(\mathbf{x})\rangle \quad (82)$$

を満たしているとする、 $\Gamma|u_n(\mathbf{x})\rangle^*$  に対して

$$\int d\mathbf{y} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Gamma|u_n(\mathbf{y})\rangle^* = -E_n \Gamma|u_n(\mathbf{x})\rangle^* \quad (83)$$

が成り立ち、 $\Gamma|u_n(\mathbf{x})\rangle^*$  は  $E = -E_n < 0$  の準粒子状態となるからである。

ここで興味深いのは、ゼロエネルギー状態  $|u_0(\mathbf{x})\rangle$  は、必ずしも対をなさなくてよいことである。実際、 $\Gamma|u_0(\mathbf{x})\rangle^*$  が  $|u_0(\mathbf{x})\rangle$  に比例している場合には、上の操作を行っても新しい状態は作れない。したがって、ゼロエネルギー状態が奇数個ある場合もおこりうるのである。

そこで、ゼロエネルギー状態の個数を  $N_0$  個とし、その偶奇で決まる指数  $(-1)^{N_0}$  を考えてみよう。このとき、この指数は超伝導状態を断熱的に変化させても変わらない。これは、超伝導状態を断熱的に変化させた時に、あるゼロエネルギー状態が、例えば正のエネルギー状態になったとすると、上に述べた電子・正孔対称性の帰結より、必ず別のゼロエネルギー状態が対となる負エネルギー状態にならないとならず、 $N_0$  は2個単位でしか減らないからである。また、逆に、有限のエネルギーをもつものがゼロエネルギーとなる場合には、必ず対になる状態もゼロエネルギー状態にならないとならず、 $N_0$  は2個単位でしか増えないからである。したがって、 $N_0$  が奇数個の場合には、断熱的变化の下で、ゼロエネルギー状態がゼロ個になることは起こりえない。いいかえると、超伝導状態においては、電子・正孔対称性のおかげで、ゼロエネルギー状態が安定性を獲得する。この性質は、後で超伝導渦中のゼロモードの個数を議論する際にも使うので覚えておこう。

## 6.2 マヨラナエッジ状態

実際にマヨラナ条件 (77) によって、どのようにマヨラナフェルミオンが現れるかを1バンド模型を例に調べてみよう。特に、時間反転対称性の破れた2次元超伝導体を考えることにし、図8のように  $y$  方向に拡がっているが、 $x$  方向には端がある、そういう形状をしていると仮定する。この時、トポロジカル不変量  $\nu_{2d}$  がゼロでない場合には、図12b) のように線形な分散

$$E = ck_y \quad (84)$$

をもつ状態が、ギャップレスエッジ状態として現れる。以下では、マヨラナ条件 (77) を課すことで、このギャップレスエッジ状態がマヨラナフェルミオンとなることを示そう。また、超伝導状態の違いによって、許されるマヨラナフェルミオンの数が変わることも見ておこう。

### 6.2.1 スピン一重項超伝導

最初に、スピン一重項超伝導状態の場合を考えよう。 $x$  方向に端がある場合を考えるには、(26) 式のように、 $x$  方向は座標で表しておき、 $y$  方向は運動量  $k_y$  で表したハミルトニアンを使うのが便利である。ここでは、格子模型ではない場合も考慮して、 $x$  方向の座標を  $x$ 、または  $x'$  で表しておこう。いま、

$$c_{k_y\sigma}^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k_x} e^{ik_x x} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, \quad (L: x \text{ 方向の長さ}) \quad (85)$$

とおくと、ハミルトニアンは

$$H = \sum_{k_y} \int dx dx' \left( c_{k_y\uparrow}^\dagger(x), c_{-k_y\downarrow}(x) \right) H(x, x'; k_y) \begin{pmatrix} c_{k_y\uparrow}(x') \\ c_{-k_y\downarrow}^\dagger(x') \end{pmatrix} \quad (86)$$

となる。ここで、 $H(x, x'; k_y)$  は

$$\epsilon(x, x'; k_y) = \frac{1}{L} \sum_{k_x} \epsilon(\mathbf{k}) e^{-ik_x(x-x')}, \quad \eta(x, x'; k_y) = \frac{1}{L} \sum_{k_x} \eta(\mathbf{k}) e^{-ik_x(x-x')} \quad (87)$$

をつかって

$$H(x, x'; k_y) = \begin{pmatrix} \epsilon(x, x'; k_y) & \eta(x, x'; k_y) \\ \eta^*(x', x; k_y) & -\epsilon(x', x; -k_y) \end{pmatrix} \quad (88)$$

と表される  $2 \times 2$  行列である。

スピン一重項超伝導体の場合

$$\epsilon(x, x'; k_y) = \epsilon(x', x; -k_y), \quad \eta(x, x'; k_y) = \eta(x', x; -k_y) \quad (89)$$

が成り立つので、 $H(x, x; k_y)$  は、次の式を満たしている。

$$\sigma_2^{-1} H(x, x'; k_y) \sigma_2 = -H^*(x, x'; -k_y) \quad (90)$$

したがって、スピン一重項超伝導体の場合、 $4 \times 4$  行列のハミルトニアンで成り立つ (81) 式の電子・正孔対称性の他に、(90) 式で与えられるあたらしい対称性 (これも電子・正孔対称性とよばれている) が成り立つことになる。

それでは、電子・正孔対称性 (90) を使って、エッジ状態を調べてみよう。 $|u(x; k_y)\rangle$  が (84) 式の分散を持つエッジ状態であるとする

$$\int dx' H(x, x'; k_y) |u(x'; k_y)\rangle = ck_y |u(x; k_y)\rangle \quad (91)$$

が成り立つ。そこで、新しい電子・正孔対称性 (90) を使うと、

$$\begin{aligned} \int dx' H(x, x'; k_y) \sigma_2 |u^*(x'; -k_y)\rangle &= - \int dx' \sigma_2 H(x, x'; -k_y) |u^*(x'; -k_y)\rangle \\ &= ck_y \sigma_2 |u^*(x'; -k_y)\rangle \end{aligned} \quad (92)$$



となるので、 $\sigma_2|u^*(x, -k_y)\rangle$  も同じエッジに局在し同じ分散を持つエッジ状態であることがわかる。また、この2つのエッジ状態は互いに独立である。これを見るには、 $|u(x; k_y)\rangle$  の成分を

$$|u(x; k_y)\rangle = \begin{pmatrix} u(x; k_y) \\ v(x; k_y) \end{pmatrix} \quad (93)$$

と書き、とくに  $k_y = 0$  の場合を考えてみれば良い。この時

$$\langle u(x; 0)|\sigma_2|u^*(x; 0)\rangle = -i(u^*(x; 0)v^*(x; 0) - v^*(x; 0)u^*(x; 0)) = 0 \quad (94)$$

より、この2つの状態は直交していることがわかるので、

$$|u(x; k_y)\rangle \propto \sigma_2|u^*(x; k_y)\rangle \quad (95)$$

という線形従属の関係を満たせないからである。したがって、(91) 式を満たすギャップレスエッジ状態  $|u(x; k_y)\rangle$  は単独では存在できず、かならず対になっていることがわかる。

今、独立なギャップレスエッジ状態が2個あったとしてマヨラナ条件 (77) を課してみよう。対になったギャップレスエッジ状態を

$$|u^a(x; k_y)\rangle = \begin{pmatrix} u^a(x; k_y) \\ v^a(x; k_y) \end{pmatrix}, \quad (a = 1, 2) \quad (96)$$

と書くと、これは  $(c_{k_y\uparrow}(x), c_{-k_y\downarrow}^\dagger(x))^T$  の基底の解である。そこで、マヨラナ条件 (77) が使えるように、

$$\Psi(x; k_y) = \begin{pmatrix} c_{k_y\uparrow}(x) \\ c_{k_y\downarrow}(x) \\ c_{-k_y\uparrow}^\dagger(x) \\ c_{-k_y\downarrow}^\dagger(x) \end{pmatrix} \quad (97)$$

の基底で解を書き直すと、結局

$$\begin{pmatrix} u^a(x; k_y) \\ v^{a*}(x; -k_y) \\ u^{a*}(x; -k_y) \\ v^a(x; k_y) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} iu^a(x; k_y) \\ -iv^{a*}(x; -k_y) \\ -iu^{a*}(x; -k_y) \\ iv^a(x; k_y) \end{pmatrix} \quad (98)$$

という4つの独立なギャップレス状態を得ることができる。これらは、すべて、 $y$  方向を運動量表示した場合のマヨラナ条件

$$\Psi(x; k_y) = \Gamma \Psi^*(x; -k_y), \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ \mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \quad (99)$$

を満たし、 $E = ck_y$  の分散を持つ。ここで、(98) 式のギャップレス状態を使い、 $\Psi(x; k_y)$  をモード展開すると、

$$\Psi(x; k_y) = \sum_{a=1,2} \gamma_{(2a-1)}(k_y) \begin{pmatrix} u^a(x; k_y) \\ v^{a*}(x; -k_y) \\ u^{a*}(x; -k_y) \\ v^a(x; k_y) \end{pmatrix} + \sum_{a=1,2} \gamma_{(2a)}(k_y) \begin{pmatrix} iu^a(x; k_y) \\ -iv^{a*}(x; -k_y) \\ -iu^{a*}(x; -k_y) \\ iv^a(x; k_y) \end{pmatrix} + \dots \quad (100)$$

となる。(…はギャップレスモードの以外の寄与。) このとき、 $\Psi(x; k_y)$  のマヨラナ条件 (77) から

$$\gamma_{(m)}(k_y) = \gamma_{(m)}^\dagger(-k_y), \quad (m = 1, 2, 3, 4) \quad (101)$$

が導かれる。また、 $c_{k_y\sigma}(x)$  の交換関係を使って

$$\{\gamma_{(m)}(k_y), \gamma_{(m')}^\dagger(k'_y)\} = \delta_{m,m'}\delta_{k_y,k'_y}, \quad \{\gamma_{(m)}(k_y), \gamma_{(m')}(k'_y)\} = 0 \quad (102)$$

を得ることができる。更に、 $\Psi(x; k_y)$  の運動方程式

$$i\partial_t \Psi(x; k_y) = [\Psi(x; k_y), H] \quad (103)$$

を使うと、 $\gamma_{(m)}(k_y)$  は

$$i\partial_t \gamma_{(m)}(k_y) = ck_y \gamma_{(m)}(k_y) \quad (104)$$

を満たすことがわかる。

ここで得た3つの式、(101)、(102)、(104) は、質量ゼロの1+1次元マヨラナフェルミオン (厳密には、マヨラナワイルフェルミオン) が満たす式と全く同じである。そこで、以下では、 $\gamma_{(m)}(k_y)$  のことを、素粒子論と同様にマヨラナフェルミオンとよぶことにする。

以上の考察をまとめると、時間反転対称性のないスピン一重項超伝導体に対しては、エッジモードにマヨラナフェルミオンが4つずつ組になって現れることになる。

### 6.2.2 スピン三重項超伝導

次に、 $d_z \neq 0$ ,  $d_x = d_y = 0$  のスピン三重項超伝導の場合を調べてみよう。この場合も、スピン一重項超伝導体の場合と同様にしてハミルトニアンを (88) 式の形で表してみることが可能である。この時には、

$$\epsilon(x, x'; k_y) = \epsilon(x', x; -k_y), \quad \eta(x, x'; k_y) = -\eta(x', x; -k_y) \quad (105)$$

が成り立つので、 $H(x, x; k_y)$  は、次の新しい電子・正孔対称性を持つことがわかる。

$$\sigma_1^{-1} H(x, x'; k_y) \sigma_1 = -H^*(x, x'; -k_y) \quad (106)$$

以下では、この式を使って、ギャップレスエッジ状態を調べてみよう。

$|u(x; k_y)\rangle$  が (84) 式の分散を持つエッジ状態であるとする

$$\int dx' H(x, x'; k_y) |u(x'; k_y)\rangle = ck_y |u(x; k_y)\rangle \quad (107)$$

が成り立つ。ここで電子・正孔対称性 (106) を使うと、

$$\begin{aligned} \int dx' H(x, x'; k_y) \sigma_1 |u^*(x'; -k_y)\rangle &= - \int dx' \sigma_1 H(x, x'; -k_y) |u^*(x'; -k_y)\rangle \\ &= ck_y \sigma_1 |u^*(x'; -k_y)\rangle \end{aligned} \quad (108)$$

となり、 $\sigma_1|u^*(x, -k_y)\rangle$  も同じエッジに局在し同じ分散を持つエッジ状態であることがわかる。ところが、スピン一重項超伝導体の場合とは違って、この2つのエッジ状態は互いに独立とは限らない。スピン一重項超伝導体の場合と同様に、 $|u(x; k_y)\rangle$  の成分を

$$|u(x; k_y)\rangle = \begin{pmatrix} u(x; k_y) \\ v(x; k_y) \end{pmatrix} \quad (109)$$

と書き、 $k_y = 0$  の場合を調べても

$$\langle u(x; 0)|\sigma_1|u^*(x; 0)\rangle = 2u^*(x; 0)v^*(x; 0) \quad (110)$$

となり、2つの状態が直交するとはいえないからである。したがって、この場合には、(107)の解が単独で存在することが可能である。実際、図12b)で示したように、 $\nu_{2d} = 1$  の場合には、1つしか(107)の解は存在しない。(図12b)には2個ギャップレスモードがあるようにみえるが、これは端が  $i_x = 0$  と  $i_x = L$  の2か所にあるためである。各端には1つずつしかギャップレスモードは存在していない。) また、 $\nu_{2d} = -1$  の場合も、ギャップレスモードは1つしかないことが知られている。

ここで、(107)を満たすギャップレスエッジ状態が1つしかない場合にマヨラナワイルフェルミオンがいくつ得られるか数えてみよう。まず、この場合、エッジ状態  $|u(x; k_y)\rangle$  と  $\sigma_1|u^*(x; k_y)\rangle$  は独立でないので、位相因子  $e^{i\phi(k_y)}$  を使って

$$|u(x, k_y)\rangle = e^{i\phi(k_y)}\sigma_1|u^*(x; -k_y)\rangle \quad (111)$$

の関係が成り立つ。この時、この式の両辺の複素共役をとり、 $\sigma_1$  をかけ、 $k_y$  を  $-k_y$  に置き換えると

$$e^{i\phi(-k_y)}\sigma_1|u^*(x, -k_y)\rangle = |u(x; k_y)\rangle \quad (112)$$

となるので、これと(111)式とを比較して、 $\phi(k_y) = \phi(-k_y)$  を得る。したがって、 $e^{-i\phi(k_y)/2}|u(x; k_y)\rangle$  を改めて  $|u(x; k_y)\rangle$  と定義しなおすと、

$$|u(x, k_y)\rangle = \sigma_1|u^*(x; -k_y)\rangle \quad (113)$$

が成り立ち、 $|u(x; k_y)\rangle$  は

$$|u(x; k_y)\rangle = \begin{pmatrix} u(x; k_y) \\ u^*(x; -k_y) \end{pmatrix} \quad (114)$$

の形にできる。そこで、スピン一重項超伝導体の場合と同様に  $\Psi(x; k_y)$  の基底での解をつくると、

$$\begin{pmatrix} u(x; k_y) \\ u(x; k_y) \\ u^*(x; -k_y) \\ u^*(x; -k_y) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} iu(x; k_y) \\ -iu(x; k_y) \\ -iu^*(x; -k_y) \\ iu^*(x; -k_y) \end{pmatrix} \quad (115)$$

とマヨラナ条件 (77) を満たし、 $E = ck_y$  の分散を持つ 2 つの独立なギャップレスエッジ状態が得られる。このギャップレスエッジ状態を使い、 $\Psi(x; k_y)$  を以下のようにモード展開すると、

$$\Psi(x; k_y) = \gamma_{(1)}(k_y) \begin{pmatrix} u(x; k_y) \\ u(x; k_y) \\ u^*(x; -k_y) \\ u^*(x; -k_y) \end{pmatrix} + \gamma_{(2)}(k_y) \begin{pmatrix} iu(x; k_y) \\ -iu(x; k_y) \\ -iu^*(x; -k_y) \\ iu^*(x; -k_y) \end{pmatrix} + \dots \quad (116)$$

$\Psi(x; k_y)$  のマヨラナ条件と  $c_{ky\sigma}(x)$  の交換関係から

$$\begin{aligned} \gamma_{(m)}(k_y) &= \gamma_{(m)}^\dagger(-k_y), \quad (m = 1, 2), \\ \{\gamma_{(m)}(k_y), \gamma_{(m')}^\dagger(k'_y)\} &= \delta_{m,m'} \delta_{k_y, k'_y}, \quad \{\gamma_{(m)}(k_y), \gamma_{(m')}(k'_y)\} = 0 \end{aligned} \quad (117)$$

が導かれる。この  $\gamma_{(m)}(k_y)$  もスピン一重項超伝導の場合と同様に、(104) 式を満たすマヨラナフェルミオンである。したがって、今の場合には、マヨラナワイルフェルミオンが 2 つエッジに存在することになる。

(107) の解が複数個ある場合にも、同様の考察ができ、結局、 $d_x = d_y = 0$  でかつ時間反転対称性が破れたスピン三重項超伝導体に対しては、エッジモードにマヨラナワイルフェルミオンが 2 つずつ組になって現れることが分かる。

### 6.2.3 スピンレス超伝導体

最後にスピンレス超伝導体の場合を考えてみよう。この場合のハミルトニアンは上で調べたスピン三重項超伝導体と同じ (105) 式を満たす (88) 式である。したがって、この場合も、ギャップレスエッジ状態は (107) 式を満たし、その解は単独で存在できる。そこで、(107) 式を満たすギャップレスエッジ状態が 1 つしかない場合、つまり  $\nu_{2d} = \pm 1$  の場合にマヨラナワイルフェルミオンがいくつ得られるか数えてみよう。

スピン三重項超伝導体の場合と同様にして、このギャップレスエッジ状態は

$$|u(x; k_y)\rangle = \begin{pmatrix} u(x; k_y) \\ u^*(x; -k_y) \end{pmatrix} \quad (118)$$

の形にすることができる。ここまでは、スピン三重項超伝導体の場合と全く同じである。ところが、スピン三重項超伝導体の場合には、この 1 つの状態から、マヨラナ条件 (77) を満たす状態が 2 つ作れるのに対して、スピンレス超伝導体の場合には、 $|u(x; k_y)\rangle$  が  $(c_{ky\uparrow}(x), c_{-ky\uparrow}^\dagger(x))$  の基底で書かれているため、 $\Psi(x; k_y)$  の基底で書き直しても

$$\begin{pmatrix} u(x; k_y) \\ 0 \\ u^*(x; -k_y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (119)$$

と 1 つしかマヨラナ条件を満たすエッジ状態が作れない。したがって、 $\nu_{2d} = \pm 1$  の時には、モード展開によって得られるマヨラナフェルミオンは 1 つである。

### 6.3 渦のマヨラナゼロモード

#### 6.3.1 スピンレス超伝導状態中の渦のマヨラナゼロモード

上で見たように、2次元スピンレス超伝導体で  $\nu_{2d} = \pm 1$  の場合には、エッジにマヨラナフェルミオンが1つ現れる。このような超伝導状態において、超伝導渦を考えると、そこには、奇数個 (多くの場合1個) のマヨラナゼロモードが渦の束縛状態として現れる。以下では、このことを示すことにしよう。

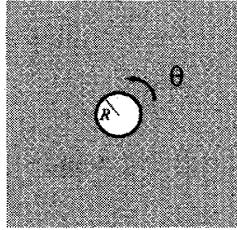


図 14: 超伝導渦

エッジ状態と超伝導渦を結び付けるために、まず、図 14 に示すように、超伝導渦を超伝導体中に空いた円形の穴とみなすことにする。このとき穴の中心には、超伝導渦と同様に、単位磁束  $\Phi_0 = \pi/e$  が貫いているとしよう。超伝導渦をこのような円とみなすことは、非常に荒っぽい近似であるが、ゼロエネルギー状態の個数が奇数か偶数かを議論するには、これで十分である。6.1 章で説明したように、電子・正孔対称性から、ゼロエネルギー状態の個数の偶奇は、超伝導状態の変形に対して安定である。そのため、実際の超伝導渦の超伝導ギャップを連続変形させて円形の穴を得たと考え、ゼロエネルギー状態の個数の偶奇は本物の超伝導渦の場合と同じになるからである。また、以下で見るように、非可換統計性の議論には、ゼロエネルギー状態の個数の偶奇だけがわかれば十分である。

最初に、簡単のため、2次元スピンレス  $p$  波カイラル超伝導体を考えることにする。先に述べたように、 $\nu_{2d} = \pm 1$  である場合には、各エッジにギャップレスエッジモードが1つあり、その分散関係は、ゼロエネルギー近傍では

$$E = ck_y \quad (120)$$

と線形になっている。したがって、エッジが半径  $R$  の円形の場合には、 $k_y$  は  $z$  方向の角運動量  $l_z$  を使って書き換えられ、エッジモードの分散関係は

$$E = c \frac{l_z}{2\pi R} \quad (121)$$

となると期待できる。ところが、いまの場合には、超伝導ギャップ及び円内に閉じ込められている磁束が角運動量を持っているため、角運動量自体は良い量子数になっていない。したがって、もう少し注意深い考察が必要である。

渦度が $\pm 1$ である渦を考えた場合、スピンレスカイラル  $p$  波超伝導体の超伝導ギャップは

$$\eta(\mathbf{x}) = \eta(r)e^{\pm i\theta}(k_x + ik_y), \quad (\theta \text{ は図 14 の角変数}) \quad (122)$$

で与えられる。渦を円形の穴として取り扱う場合、 $\eta(r)$  は図 15 のような形をしている。この時

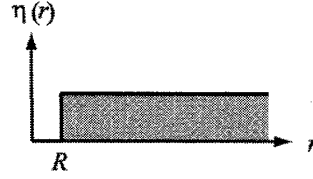


図 15: 超伝導渦

$k_x = k \cos \theta$ ,  $k_y = k \sin \theta$  とおくと、

$$\eta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \eta(r)e^{i2\theta}k, & \text{渦度 1 の場合} \\ \eta(r)k, & \text{渦度 -1 の場合} \end{cases} \quad (123)$$

となるので、磁束の持つ角運動量も合わせて、超伝導ギャップは  $l_z = 2$  または  $l_z = 0$  の角運動量を持つ。後者の場合は、角運動量は良い量子数であり、(121) の表式はそのまま成り立つ。一方、前者の場合には、特異ゲージ変換

$$c_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \rightarrow e^{-i\theta} c_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \equiv c'_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \quad (124)$$

を行うと、 $\eta(\mathbf{x})$  は  $\eta(\mathbf{x}) \rightarrow \eta(r)k$  となり、後者の場合に帰着させることができる。したがって、(121) の表式はやはり成り立つが、この場合の  $l_z$  は、元の場合に対する角運動量でなく  $c'_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{k})$  に対する角運動量となる。いずれにせよ、元の場合  $c_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x})$  が  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$  に対して一意性をもつことから、 $l_z$  は整数値  $l_z = n$  に量子化され、

$$E = c \frac{n}{2\pi R} \quad (125)$$

が成り立つ。この式から、ゼロモードが1つだけ  $n = 0$  の場合に存在していることが分かる。

以上は、超伝導渦を円形の穴で近似した場合の結果であるが、先に述べたように、近似なしの実際の超伝導渦に対しても、電子・正孔対称性より、ゼロモードが奇数個存在していることが結論づけられる。(実際に BdG 方程式を解いた結果によると、実際の超伝導渦の場合にも1つしかゼロモードがないことが知られている。)

ここで、渦度がゼロでないことが、ゼロモードの存在にとって不可欠であることに注意しよう。渦度がゼロの穴の場合には、超伝導ギャップは

$$\eta(\mathbf{x}) = \eta(r)(k_x + ik_y) \quad (126)$$

である。このとき、特異ゲージ変換をつかって

$$c_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \rightarrow e^{-i\theta/2} c_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \equiv c''_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \quad (127)$$

とすると、やはり  $\eta(\mathbf{x}) \rightarrow \eta(r)k$  の形にできる。したがって、この場合にも、 $l_z$  を  $c_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x})$  の角運動として、(121) 式の分散をもつ渦の束縛状態が現れる。ところが、(127) の特異ゲージ変換から、元の場合  $c_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x})$  が  $\theta$  に関して一意であるとする、 $c_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x})$  は  $\theta$  に対して反周期境界条件を満たすことになる。そのため、 $l_z$  は半整数に量子化され、結局束縛状態のエネルギーは

$$E = c \frac{n + 1/2}{2\pi R} \quad (128)$$

となる。したがって、この場合にはゼロエネルギー状態は存在しない。

それでは、渦に束縛されたゼロモードにマヨラナ条件を課すと何か起こるか見ておこう。今考えているスピンレス超伝導は上向きスピンの電子のみからなっているので、(122) 式の渦に対するゼロモードは、 $\Psi(\mathbf{x})$  の基底では、

$$|u_0(\mathbf{x})\rangle = \begin{pmatrix} u_0(\mathbf{x}) \\ 0 \\ u_0^*(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (129)$$

の形で与えられる。(ここで、電子・正孔対称性を使って、 $|u_0(\mathbf{x})\rangle = \Gamma|u_0(\mathbf{x})^*\rangle$  を満たすように、ゼロモードの位相を選んだ。) この時、 $\Psi(\mathbf{x})$  を

$$\Psi(\mathbf{x}) = \gamma_0 |u_0(\mathbf{x})\rangle + \dots, \quad (130)$$

とモード展開してみよう。すると、ゼロモード  $|u_0(\mathbf{x})\rangle$  の規格直交化条件より

$$\gamma_0 = \int d\mathbf{x} [u_0^*(\mathbf{x}) c_{\uparrow}(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x}) c_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x})] \quad (131)$$

が得られる。したがって、 $\gamma_0$  は

$$\gamma_0^{\dagger} = \gamma_0 \quad (132)$$

を満たしている。また、 $c_{\uparrow}(\mathbf{x})$  と  $c_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x})$  の交換関係から、

$$\{\gamma_0, \gamma_0^{\dagger}\} = 1 \quad (133)$$

を得る。(133) 式は、通常の生成・消滅演算子の交換関係と同じであるが、 $\gamma_0$  は、ゼロモードの消滅演算子と考えることができないことに気をつけよう。なぜなら、 $\gamma_0$  は (132) 式を満たしているので、消滅演算子と考えると、同時に生成演算子にもなってしまい矛盾するからである。(132) 式を満たすゼロモードはマヨラナゼロモードと呼ばれている。

ここまでの議論では、ギャップ関数は  $p$  波であり、 $z$  方向の角運動量が 1 であることを仮定していた。ここで、結晶場の効果について少しコメントしておこう。今、結晶場の効果で、ギャップ関数に  $p$  波以外の角運動量成分が少し混じった場合を考えてみよう。この場合にも、ゼロエネルギー状態の個数の偶奇は変わらない。なぜならば、電子・正孔対称性のため、バルクのギャップが閉じない限り、ゼロエネルギー状態の個数の偶奇は変化しないからである。したがって、結晶場の効果を取り入れて、ギャップ関数が角運動量の固有状態でなくなっても、超伝導渦には、奇数個のゼロエネルギー状態が存在し、上で得た結論は変わらない。

### 6.3.2 渦の非可換統計性

2次元スピンレス超伝導体中の渦を考える。前章でみたように、 $\nu_{2d} = \pm 1$  の場合には、渦に束縛されたマヨラナゼロモードが奇数個存在する。この時、マヨラナゼロモードの影響で、渦の交換の仕方によっては、元の状態と全く異なる状態があらわれるようになる [16, 17]。この章では、この性質を見てみよう。

ここでは、図 16 に示した次の過程を考える。最初、a) に示したように、渦 1 と渦 2 があつたと

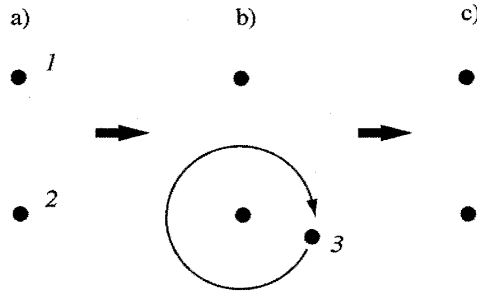


図 16: 渦を交換する過程

する。そこへ 渦 3 が現れて、b) に示したように渦 2 の周りを 1 周回り、そのあと遠くへ去ったとする。このとき、最終的な配置 c) は、最初の配置 a) と見掛け上全く同じである。ところが、マヨラナゼロモードを考慮すると、量子論的には、a) と c) は全く違った状態になる。以下ではこれを示そう。

まず、話を簡単にするために、各渦に束縛されたマヨラナゼロモードは 1 つである (一般の奇数個の場合は、後で議論する) と仮定する。渦  $i$  のマヨラナゼロモードを  $\gamma_0^{(i)}$  と書くと、前章と同様の計算により、

$$\gamma_0^{(i)} = \gamma_0^{(i)\dagger}, \quad \{\gamma_0^{(i)}, \gamma_0^{(j)\dagger}\} = \delta_{ij} \quad (134)$$

が成り立つ。

前章でも説明したように、 $\gamma_0^{(i)\dagger}$  は  $\gamma_0^{(i)} = \gamma_0^{(i)\dagger}$  を満たしているのに、これを生成演算子と考えると、同時に消滅演算子にもなってしまい、矛盾してしまう。この矛盾を解消するには、2 つのマヨラナゼロモード、たとえば、 $\gamma_0^{(1)}$  と  $\gamma_0^{(2)}$  を組み合わせて、 $\gamma^\dagger = (\gamma_0^{(1)} + i\gamma_0^{(2)})/\sqrt{2}$  をつくればよい。このとき、 $\gamma^\dagger$  は

$$\gamma^\dagger \neq \gamma, \quad \{\gamma, \gamma^\dagger\} = 1 \quad (135)$$

を満たし、通常の生成演算子となっているからである。ここで、矛盾なく生成演算子を定義するために、異なる渦のマヨラナゼロモードを使わなければならなかったことに注意しよう。このため、系は必然的に、非局所性を持つことになる。

それでは、図 16 の過程に、渦 1 と渦 2 のマヨラナゼロモード  $\gamma_0^{(1)}$  と  $\gamma_0^{(2)}$  の影響を取り入れてみよう。最初、図 16a) の時には、状態は  $\gamma = (\gamma_0^{(1)} - i\gamma_0^{(2)})/\sqrt{2}$  で消去される状態 (これを  $|0\rangle$  と書こ



う)で

$$\gamma|0\rangle = 0 \quad (136)$$

を満たしていると仮定する。このとき、渦3が渦2の周りを1周回る過程(図16b))を考えると、これは、渦3からみると、渦2が渦3の周りを1周したと同じである。したがって、この過程より、渦2のマヨラナゼロモードは、アハラノフ・ボーム位相を得ることになる。渦3の磁束は  $\Phi_0 = \pi/e$  なので、この周りを電子(ホール)が1周すると、アハラノフ・ボーム効果によって

$$e^{ie\Phi_0} = -1, \quad (e^{-ie\Phi_0} = -1) \quad (137)$$

の位相が生じる。したがって、電子とホールの重ね合わせであるマヨラナゼロモードも  $-1$  の位相を得て、

$$\gamma_0^{(2)} \rightarrow -\gamma_0^{(2)} \quad (138)$$

と変換される。面白いことに、これは消滅演算子  $\gamma$  が図16b)の過程で

$$\gamma = (\gamma_0^{(1)} - i\gamma_0^{(2)})/\sqrt{2} \rightarrow \gamma^\dagger = (\gamma_0^{(1)} + i\gamma_0^{(2)})/\sqrt{2} \quad (139)$$

と生成演算子  $\gamma^\dagger$  へ変化することを意味している。その結果、図16c)の最終的な状態は、 $\gamma$  でなく  $\gamma^\dagger$  で消去される状態(これを  $|1\rangle$  と書く)

$$\gamma^\dagger|1\rangle = 0 \quad (140)$$

となる。(140)式から、 $|1\rangle$  は  $\gamma^\dagger|0\rangle$  に比例することがわかるので、結局、最終的な状態  $|1\rangle$  は最初の状態  $|0\rangle$  と直交する、完全に異なる状態になっていることがわかる。

ここまでは、渦に束縛されたマヨラナゼロモードが1つである場合を考えてきたが、同様の考察が渦に束縛されたマヨラナゼロモードが奇数個の場合にも可能である。この場合にも、矛盾なく生成演算子を作るためには、異なる渦のマヨラナゼロモードを組み合わせる必要があるからである。その結果、上と同じ過程によって、元の状態と全く異なる状態が得られることになる。(他方、仮に渦に束縛されたマヨラナゼロモードが偶数個の場合には、同じ渦に束縛されたマヨラナゼロモードを使って、生成演算子を定義することが可能である。したがって、上に見たような現象は生じない。)

このように、粒子を交換しただけで、元の状態と完全に異なる状態が得られることは、通常のボソンやフェルミオン、あるいはエニオンのように粒子の交換で状態の位相のみが変わる粒子では考えられない性質である。このように、粒子の交換により新しい状態が得られる統計性は、非可換統計性とよばれている。

### 6.3.3 半量子渦

6.2.1章で示したように、時間反転対称性の破れた2次元スピン一重項超伝導体の端には、マヨラナフェルミオンが4つずつ組になって現れる。また、6.2.2章で見たように、 $d_x = d_y = 0$  の2次

元スピン三重項超伝導体の場合には、マヨラナフェルミオンが2つずつ組になって現れる。したがって、スピンレス超伝導体と同様の議論をつかって、超伝導渦に束縛されたマヨラナゼロモードの個数を数えると、どちらの場合も、偶数個(またはゼロ個)であることがわかる。したがって、各渦ごとに、ゼロモードの生成・消滅演算子を定義することが可能であり、渦を交換させても、生成演算子が消滅演算子に変わるようなことは起きず、渦は非可換統計性を示さない。

ところが、スピン三重項超伝導体には、通常の渦の他に、半量子渦というものが存在しており、この半量子渦は、非可換統計性に従うことが知られている [17]。ここでは、これを説明しよう。

半量子渦とは、超伝導ギャップの  $d$  ベクトルが次のような形をした渦である。

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \eta(\mathbf{k}; r) e^{i\theta/2} (\cos \theta/2, \sin \theta/2, 0) \quad (141)$$

この時、ギャップ関数は

$$\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = i \mathbf{d}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \sigma_y = \begin{pmatrix} -\eta(\mathbf{k}; r) & 0 \\ 0 & \eta(\mathbf{k}; r) e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (142)$$

となる。この形をみると、上向きスピンの電子と下向きスピンの電子が結合しておらず、上向きスピン、下向きスピンそれぞれの電子からなる2つのスピンレス超伝導体と、この系をみなすことができる。また、上向きスピンの電子に結合した渦と下向きスピンの電子に結合した渦とは、渦度が異なっており、下向きスピンの部分の渦のみ渦度1になっている。したがって、6.3.1章の考察から、下向きスピンの部分にのみ、渦に束縛されたゼロモードが奇数個存在することがわかる。このことから、6.3.2章と同じ考察をすると、半量子渦は非可換統計に従うことを示される。このような半量子渦は、 $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  や  $^3\text{He A}$  相などで実現可能であると考えられている。

## 7 おわりに

本稿では、トポロジカル超伝導体入門として、前半部分では、その基本的性質をエッジ状態とトポロジカル数の関係を中心に説明した。また、トポロジカル数を計算する際に便利な公式(式(20)や式(39)など)を与えた。後半部分では、超伝導体では準粒子にマヨラナ条件が課され、そのために渦の非可換統計性という著しい性質が現れることを示した。

今回は、簡単のため、超伝導ギャップが1成分で与えられる場合に話を限ったが、複数の超伝導ギャップが存在する場合には、もっと面白いことが現れる。特に、時間反転対称性がある場合には、量子スピンホール状態 [18] と類似の状態が現れる。たとえば、Rashba 型の空間反転対称性の破れた超伝導体には、 $Z_2$  トポロジカル数によって保護されたエッジモードが現れる [4, 5]。また、 $^3\text{He}$  超流動体 B 相の表面のアンドレーフ束縛状態 [19, 20] も、トポロジカル数によって保護された2+1次元ギャップレスマヨラナフェルミオンとして理解されている。

その他に、本稿で紹介できなかった話題(のごく一部)を、筆者の気がつく範囲内で挙げておく。

1. ランダム行列理論を用いたトポロジカル超伝導体の分類の話 [3]、

2. トポロジカル絶縁体や磁性半導体と超伝導の接合系の話題 [21]、
3. 冷却原子の超流動状態のトポロジカルな性質 [22, 23]、
4. 超伝導ギャップのノード構造とトポロジカル数の関係 [24, 25]、
5. スピン3重項超伝導体とフェルミ面のトポロジーの関係 [26, 27]、

これらの話題については、個々の参考文献にあたってほしい。

## A 巻きつき数について

### A.1 時間反転対称性のある場合

この付録では、巻きつき数の表式 (18) を求める。まず、

$$\cos \theta(\mathbf{k}) = \frac{\epsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + \eta(\mathbf{k})^2}}, \quad \sin \theta(\mathbf{k}) = \frac{\eta(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + \eta(\mathbf{k})^2}}, \quad (143)$$

とおくと、ハミルトニアン (12) は

$$H(\mathbf{k}) = \sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + \eta(\mathbf{k})^2} \begin{pmatrix} \cos \theta(\mathbf{k}) & \sin \theta(\mathbf{k}) \\ \sin \theta(\mathbf{k}) & -\cos \theta(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (144)$$

と書きなおされる。この時、

$$|u(\mathbf{k})\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta(\mathbf{k})/2) \\ -\cos(\theta(\mathbf{k})/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(\mathbf{k})/2 - \pi/2) \\ \sin(\theta(\mathbf{k})/2 - \pi/2) \end{pmatrix} \quad (145)$$

と置くと、これが、 $E = -\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + \eta(\mathbf{k})^2}$  の固有状態であることを容易に確認することができる。したがって、

$$\alpha(\mathbf{k}) = \frac{\theta(\mathbf{k}) - \pi}{2} \quad (146)$$

と置くと、確かに準粒子の波動関数は、(14) の形をとっている。この時、 $-\pi \leq k_x < \pi$  の作る 1 次元円から、準粒子の波動関数全体の作る空間への写像は

$$(\cos 2\alpha(\mathbf{k}), \sin 2\alpha(\mathbf{k})) \quad (147)$$

によって与えられるから、ブリルアンゾーンの像が何回ヒルベルト空間に巻きついているかを数えるには、

$$\nu_{1d} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x \partial_{k_x} (2\alpha(\mathbf{k})) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x \partial_{k_x} \theta(\mathbf{k}) \quad (148)$$

を計算すればよい。一方、(19) で定義される  $m_a(\mathbf{k})$  ( $a = 1, 2$ ) に対して

$$m_1(\mathbf{k}) \partial_{k_x} m_2(\mathbf{k}) - m_2(\mathbf{k}) \partial_{k_x} m_1(\mathbf{k}) = \partial_{k_x} \theta(\mathbf{k}) \quad (149)$$

が成り立つから、結局

$$\nu_{1d} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x \epsilon^{ab} m_a(\mathbf{k}) \partial_{k_x} m_b(\mathbf{k}) \quad (150)$$

が成り立つことになる。

この式を評価するには、以下のように考えるとよい。まず、 $\nu_{1d}$  の値は整数値しかとれないので、 $m_a$  を連続変形させても特異性が現れない限り、その値は変化しない。したがって、 $\eta(\mathbf{k}) \rightarrow a\eta(\mathbf{k})$  ( $a > 0$ ) と置き換えて、 $m_a(\mathbf{k})$  を

$$m_1(\mathbf{k}) = \frac{\epsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + a^2 \eta(\mathbf{k})^2}}, \quad m_2(\mathbf{k}) = \frac{a\eta(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + a^2 \eta(\mathbf{k})^2}}, \quad (151)$$

と変形させても  $\nu_{1d}$  の値は変わらない。このとき、 $a$  を十分小さい数にとると、フェルミ面上  $\epsilon(k_x, k_y) = 0$  を満たす  $k_x$  の近傍以外では、 $m_a(\mathbf{k})$  は

$$m_1(\mathbf{k}) \approx \pm 1, \quad m_2(\mathbf{k}) \approx 0 \quad (152)$$

と一定の値をとり変化しない。したがって、この部分は巻きつき数に寄与せず、フェルミ面上の  $k_x$  の近傍だけが  $\nu_{1d}$  に寄与することがわかる。今、フェルミ面上の  $k_x$  を  $k_x^0$  とおくと、 $k_x^0$  の近傍では

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \partial_{k_x} \epsilon(k_x^0, k_y) (k_x - k_x^0) + \dots, \quad \eta(\mathbf{k}) = \eta(k_x^0, k_y) \quad (153)$$

と展開でき、

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{k}) &= \frac{\partial_{k_x} \epsilon(k_x^0, k_y) (k_x - k_x^0)}{\sqrt{[\partial_{k_x} \epsilon(k_x^0, k_y) (k_x - k_x^0)]^2 + a^2 \eta(k_x^0, k_y)^2}}, \\ m_2(\mathbf{k}) &= \frac{a\eta(k_x^0, k_y)}{\sqrt{[\partial_{k_x} \epsilon(k_x^0, k_y) (k_x - k_x^0)]^2 + a^2 \eta(k_x^0, k_y)^2}}. \end{aligned} \quad (154)$$

となる。このとき、 $k_x$  を  $k_x^0$  の近傍で  $k_x < k_x^0$  から  $k_x = k_x^0$  を経由して  $k_x > k_x^0$  へと変化させると、 $m_a(\mathbf{k})$  は、

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{k}) &= -\text{sgn}[\partial_{k_x} \epsilon(k_x^0, k_y)] \rightarrow 0 \rightarrow \text{sgn}[\partial_{k_x} \epsilon(k_x^0, k_y)], \\ m_2(\mathbf{k}) &= 0 \rightarrow \text{sgn}\eta(k_x^0, k_y) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (155)$$

と変化していき、 $(m_1(\mathbf{k}), m_2(\mathbf{k}))$  はちょうど半円を描くことになる。したがって、半円を描く向きも考慮すると、 $\nu_{1d}$  への寄与は

$$-\frac{1}{2} \text{sgn}\eta(k_x^0, k_y) \text{sgn}[\partial_{k_x} \epsilon(k_x^0, k_y)], \quad (156)$$

となる。結局、フェルミ面上の  $k_x^0$  からの寄与をすべてを足し上げると

$$\nu_{1d} = -\frac{1}{2} \sum_{k_x^0 \in \text{フェルミ面}} \text{sgn}\eta(k_x^0, k_y) \text{sgn}[\partial_{k_x} \epsilon(k_x^0, k_y)], \quad (157)$$

を得る。

## A.2 時間反転対称性が破れている場合

この場合は、

$$\cos \theta(\mathbf{k}) = \frac{\epsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + \eta(\mathbf{k})^2}}, \quad \sin \theta(\mathbf{k}) e^{i\varphi(\mathbf{k})} = \frac{\eta(\mathbf{k})}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + \eta(\mathbf{k})^2}}, \quad (158)$$

と置くと便利である。この時、ハミルトニアン (29) は

$$H(\mathbf{k}) = \sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + \eta(\mathbf{k})^2} \begin{pmatrix} \cos \theta(\mathbf{k}) & \sin \theta(\mathbf{k}) e^{i\varphi(\mathbf{k})} \\ \sin \theta(\mathbf{k}) e^{-i\varphi(\mathbf{k})} & -\cos \theta(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (159)$$

と書きなおすことができ、 $E = -\sqrt{\epsilon(\mathbf{k})^2 + |\eta(\mathbf{k})|^2}$  の固有状態は

$$|u(\mathbf{k})\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta(\mathbf{k})/2) e^{i\varphi(\mathbf{k})} \\ -\cos(\theta(\mathbf{k})/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(\mathbf{k})/2 - \pi/2) e^{i\varphi(\mathbf{k})} \\ \sin(\theta(\mathbf{k})/2 - \pi/2) \end{pmatrix} \quad (160)$$

で与えられる。したがって、

$$\alpha(\mathbf{k}) = \frac{\theta(\mathbf{k}) - \pi}{2}, \quad \beta(\mathbf{k}) = -\varphi(\mathbf{k}) \quad (161)$$

とおくと、確かに準粒子の波動関数は (34) の形をとることがわかる。このとき、5.2 章で説明したように、準粒子の波動関数全体の作る空間は座標

$$(\sin 2\alpha(\mathbf{k}) \cos \beta(\mathbf{k}), \sin 2\alpha(\mathbf{k}) \sin \beta(\mathbf{k}), \cos 2\alpha(\mathbf{k})) \quad (162)$$

で表される 2 次元球面となる。

巻きつき数を勘定するには、上の座標で表される 2 次元球面の面積要素が

$$\sin(2\alpha) d(2\alpha) d\beta \quad (163)$$

になることに注意して、

$$\begin{aligned} \nu_{2d} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x dk_y \epsilon^{ij} \sin 2\alpha(\mathbf{k}) \partial_{k_i} 2\alpha(\mathbf{k}) \partial_{k_j} \beta(\mathbf{k}) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x dk_y \epsilon^{ij} \sin \theta(\mathbf{k}) \partial_{k_i} \theta(\mathbf{k}) \partial_{k_j} \varphi(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (164)$$

を計算すればよい。一方、

$$\epsilon^{ij} \epsilon^{abc} m_a(\mathbf{k}) \partial_{k_i} m_b(\mathbf{k}) \partial_{k_j} m_c(\mathbf{k}) = 2\epsilon^{ij} \sin \theta(\mathbf{k}) \partial_{k_i} \theta(\mathbf{k}) \partial_{k_j} \varphi(\mathbf{k}) \quad (165)$$

であるので、結局

$$\nu_{2d} = -\frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x dk_y \epsilon^{ij} \epsilon^{abc} m_a \partial_{k_i} m_b \partial_{k_j} m_c \quad (166)$$

を得る。

この  $\nu_{2d}$  を先と同じような方法で評価してみよう。まず、 $\epsilon(\mathbf{k})$  を  $\epsilon(\mathbf{k}) \rightarrow a\epsilon(\mathbf{k})$  ( $a > 0$ ) と変形し、 $m_a(\mathbf{k})$  ( $a = 1, 2$ ) を

$$m_1(\mathbf{k}) = \frac{\text{Re}\eta(\mathbf{k})}{\sqrt{a^2\epsilon(\mathbf{k})^2 + |\eta(\mathbf{k})|^2}}, \quad m_2(\mathbf{k}) = \frac{\text{Im}\eta(\mathbf{k})}{\sqrt{a^2\epsilon(\mathbf{k})^2 + |\eta(\mathbf{k})|^2}}, \quad m_3(\mathbf{k}) = \frac{a\epsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{a^2\epsilon(\mathbf{k})^2 + |\eta(\mathbf{k})|^2}},$$

とする。先にも述べたように、 $\nu_{2d}$  はトポロジカル不変量なので、この変形を行ってもその値は変わらない。このとき、 $a$  を十分小さくとると、 $\eta(\mathbf{k}) = 0$  の近傍以外の領域では  $m_3(\mathbf{k}) \approx 0$  が成り立ち、 $(m_1(\mathbf{k}), m_2(\mathbf{k}), m_3(\mathbf{k}))$  は 2 次元球面上の赤道に制限されてしまう。したがって、これらの領域は巻きつき数に寄与しない。一方、 $\eta(\mathbf{k}^0) = 0$  を満たす  $\mathbf{k}^0$  の近傍では

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{k}) &= \frac{(\partial_{k_i} \text{Re}[\eta(\mathbf{k}^0)])(k_i - k_i^0)}{\sqrt{a^2\epsilon(\mathbf{k}^0)^2 + [(\partial_{k_j} \text{Re}[\eta(\mathbf{k}^0)])^2 + (\partial_{k_i} \text{Im}[\eta(\mathbf{k}^0)])^2](k_i - k_i^0)^2}}, \\ m_2(\mathbf{k}) &= \frac{(\partial_{k_i} \text{Im}[\eta(\mathbf{k}^0)])(k_i - k_i^0)}{\sqrt{a^2\epsilon(\mathbf{k}^0)^2 + [(\partial_{k_j} \text{Re}[\eta(\mathbf{k}^0)])^2 + (\partial_{k_i} \text{Im}[\eta(\mathbf{k}^0)])^2](k_i - k_i^0)^2}}, \\ m_3(\mathbf{k}) &= \frac{a\epsilon(\mathbf{k}^0)}{\sqrt{a^2\epsilon(\mathbf{k}^0)^2 + [(\partial_{k_j} \text{Re}[\eta(\mathbf{k}^0)])^2 + (\partial_{k_i} \text{Im}[\eta(\mathbf{k}^0)])^2](k_i - k_i^0)^2}}, \end{aligned} \quad (167)$$

となるので、 $(m_1(\mathbf{k}), m_2(\mathbf{k}), m_3(\mathbf{k}))$  の写像によって、この近傍は 2 次元球面の北半球または南半球にうつされる。したがって向きも考慮すると、 $\nu_{2d}$  に対する寄与は

$$-\frac{1}{2} \text{sgn}\epsilon(\mathbf{k}^0) \text{sgndet}[\partial_{k_i} \eta_j(\mathbf{k}^0)], \quad (168)$$

となる。ここで  $\eta_i(\mathbf{k})$  ( $i = 1, 2$ ) は

$$\eta_1(\mathbf{k}) = \text{Re}\eta(\mathbf{k}), \quad \eta_2(\mathbf{k}) = \text{Im}\eta(\mathbf{k}), \quad (169)$$

である。結局、 $\eta(\mathbf{k}^0) = 0$  を満たす点の近傍からの寄与をすべて足し上げると

$$\nu_{2d} = -\frac{1}{2} \sum_{\eta(\mathbf{k}^0)=0} \text{sgn}\epsilon(\mathbf{k}^0) \text{sgndet}[\partial_{k_i} \eta_j(\mathbf{k}^0)], \quad (170)$$

が得られる。

## B マヨラナ条件について

ここでは、素粒子物理学のマヨラナ条件が (77) 式と同じであることを示す。素粒子論では、マヨラナ条件は、荷電共役変換行列  $C$  を使って定義される [28]。今、

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (171)$$

を満たす 4 次元ガンマ行列を考えると、荷電共役変換行列  $C$  は

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}, \quad CC^\dagger = 1, \quad C^T = -C \quad (172)$$

を満たす  $C$  で定義される。この時、マヨラナフェルミオンは

$$\Psi = C\gamma^{0T}\Psi^* \quad (173)$$

を満たすフェルミオンとして定義される。今、特に  $\gamma^\mu$  の表示として、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (174)$$

を選ぶと、 $C$  は  $C = i\gamma^2\gamma^0$  で与えられる。この時、(173) 式は  $\Psi = C\gamma^{0T}\Psi^* = \Gamma\Psi^*$  となり、(77) 式と一致する。

## 謝辞

超伝導体のアンドレーフ束縛状態については、浅野泰寛氏、柏谷聡氏、田仲由喜夫氏に、トポロジカル超伝導体については藤本聡氏に議論していただきました。また、安藤陽一氏、藤本聡氏、長谷部一気氏、田仲由喜夫氏、柳瀬陽一氏には、原稿に関して有益なコメントをいただきました。大変感謝いたします。最後に、物性理論におけるトポロジカルな話題全般を教えていただいた甲元眞人氏に感謝いたします。本研究の一部は住友財団助成金の支援を受けました。

## 参考文献

- [1] X. L. Qi, T. L. Hughes, S. Raghu, and S. C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **102** (2009), 187001.
- [2] R. Roy, arXiv:0803.2868.
- [3] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig, Phys. Rev. B **78** (2008), 195125.
- [4] Y. Tanaka, T. Yokoyama, A. V. Balatsky, and N. Nagaosa, Phys. Rev. B **79** (2009), 060505(R).
- [5] M. Sato and S. Fujimoto, Phys. Rev. B **79** (2009), 094504.
- [6] S.-P. Kou and X.-G. Wen, arXiv:0907.3224.
- [7] 浅野泰寛, 田仲由喜夫, 柏谷聡, 固体物理 **38** (2003), 125; 田仲由喜夫, 浅野泰寛, 固体物理 **40** (2005), 683; 田仲由喜夫, 柏谷聡, 日本物理学会誌 **64** (2009), 527.
- [8] 柏谷聡, 井口家成, 固体物理 **40** (2005), 699.
- [9] 矢口宏, 前野悦輝, 川村稔. 固体物理 **40** (2005), 712.

- [10] 住山昭彦, 固体物理 **40** (2005), 721.
- [11] 高柳英明, 「超伝導と常伝導の謎の境界」現代物理最前線 3 (共立出版株式会社 2000)
- [12] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, M. den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 405.
- [13] M. Kohmoto, Ann. Phys. **160** (1985), 343.
- [14] B. I. Halperin, Phys. Rev. B **25** (1981), 2185.
- [15] Y. Hatsugai, Phys. Rev. Lett. **71** (1993), 3697.
- [16] N. Read and D. Green, Phys. Rev. B **61** (2000), 10267.
- [17] D. A. Ivanov, Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 268.
- [18] C. L. Kane and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **95**, (2005) 146802; B. A. Bernevig and S. C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **96**, (2006) 106802; J. E. Moore and L. Balents, Phys. Rev. B **75**, (2007) 121306(R); L. Fu and C. L. Kane, Phys. Rev. B **76**, (2007) 045302; R. Roy, Phys. Rev. B **79**, (2009) 195322.
- [19] S. Higashitani, M. Miura, T. Ichikawa, M. Yamamoto, and K. Nagai, Phys. Rev. Lett. **89**, (2002) 215301.
- [20] Y. Aoki, Y. Wada, M. Saitoh, R. Nomura, Y. Okuda, N. Nagato, M. Yamamoto, S. Higashitani, and K. Nagai, Phys. Rev. Lett. **95** (2005), 075301.
- [21] L. Fu and C. L. Kane, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 096407; Y. Tanaka, T. Yokoyama, and N. Nagaosa, Phys. Rev. Lett. **103** (2009), 107002; J. Linder, Y. Tanaka, T. Yokoyama, A. Sudbø, and N. Nagaosa, Phys. Rev. Lett. **104** (2010), 067001.
- [22] Y. Tsutsumi, T. Kawakami, T. Mizushima, M. Ichioka, and K. Machida, Phys. Rev. Lett. **101**, (2008) 135302.
- [23] M. Sato, Y. Takahashi, and S. Fujimoto, Phys. Rev. Lett. **103** (2009), 020401.
- [24] G. E. Volovik, “The Universe in a Helium Droplet” (Clarendon Press, Oxford 2003).
- [25] M. Sato, Phys. Rev. B **73** (2006), 214502.
- [26] M. Sato, Phys. Rev. B **79** (2009), 214526.
- [27] M. Sato, arXiv:0912.5281.
- [28] 九後汰一郎, 「ゲージ場の量子論 I」 新物理学シリーズ 23 (培風館).